

## بررسی پایداری طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی خطی از مرتبه کسری

مریم عرب‌عامری\*، احسان میرمحرابی؛ دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی

پذیرش ۹۳/۸/۱۰

دریافت ۹۲/۴/۱۲

### چکیده

عملگرهای مشتق و انتگرال کسری مفهوم جدیدی از مشتق و انتگرال از مرتبه دلخواه است. معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی (PDE<sup>1</sup>) که مشتقات موجود در آن بتوانند از مرتبه کسری باشند معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی کسری (FPDE<sup>2</sup>) گفته می‌شود. امروزه این معادلات به‌لایل کاربرد زیاد توجه ویژه‌ای را به خود معطوف داشته‌اند. در این مقاله حالت نسبتاً کلی از یک FPDE مطرح می‌شود، برای به‌دست آوردن طرحی عددی، مشتقات کسری موجود در معادله با استفاده یکی از تعاریف متداول گرانوالد-لتنیکوف<sup>3</sup>، ریمان-لیوویل<sup>4</sup> و کاپتو<sup>5</sup> جای‌گزین می‌شوند و برای بهبود جواب عددی، مشتقات نسبی موجود در معادله با استفاده از طرح‌های تفاضلی غیراستاندارد (NSFD<sup>6</sup>) گسسته‌سازی می‌شوند. سپس پایداری طرح عددی حاصل بررسی می‌گردد و ثابت می‌شود روش معرفی شده غیرمشروط پایدار است. در پایان با هدف تأیید نتایج تئوری، تکنیک معرفی شده برای حل معادله موج با مرتبه کسری که در فیزیک و شاخه‌های آن کاربرد فراوانی دارد به‌کار می‌رود. نتایج عددی مؤید یافته‌های تئوری است و نشان از کارایی این تکنیک دارد.

واژه‌های کلیدی: مشتقات کسری، معادله دیفرانسیل مرتبه کسری، طرح تفاضلات متناهی غیر استاندارد، پایداری.

### مقدمه

تقریباً بیش‌تر قضیه‌های کاربردی در زمینه حسابان کسری را نیوتن<sup>7</sup> و لایب‌نیتز<sup>8</sup> حدود سال‌های ۱۶۸۴-۱۶۶۷ مطرح کردند [۱]. تا این که فردی به نام آبل<sup>9</sup> در سال ۱۸۶۸ برای حل مسئله‌ای فیزیکی، معادله خود را به معادله دیفرانسیل از مرتبه کسری تبدیل و سپس آن را حل کرد. طی صد سال اخیر کاربرد وسیعی از معادلات مرتبه کسری در مهندسی و علوم کاربردی بررسی شده است. از خصوصیات مشتقات کسری این است که روی دامنه‌های ناهموار تعریف‌پذیر است، که در بعضی موارد مشتقات معمولی در این نواحی تعریف‌پذیر نیست.

arabameri@math.usb.ac.ir

\*نویسنده مسئول

1. Partial Differential Equation
2. Fractional Partial Differential Equation
3. Grunwald-Letnikov
4. Riemann-Liouville
5. Caputo
6. Non-Standard Finite Difference
7. Newton
8. Leibniz
9. Abel

میکنز<sup>۱۰</sup> در سال ۱۹۹۴ طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد را برای حل دقیق‌تر معادلات دیفرانسیل مطرح کرد [۲] و مومانی<sup>۱۱</sup> در سال ۲۰۱۱ طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد را برای معادلات با مشتقات نسبی به‌کار گرفت [۳]. در این مقاله نیز ابتدا روش عددی مبتنی بر تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل نسبی کسری مطرح و سپس پایداری این طرح بررسی می‌شود.

### طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد

میکنز در سال ۱۹۹۴، اصول اولیه طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد را معرفی کرد [۲]. ابتدا اصول اولیه این طرح را برای معادله دیفرانسیل معمولی (ODE<sup>۱۲</sup>) شرح می‌دهیم، گسسته‌سازی غیراستاندارد برای PDE به‌طور مشابه انجام می‌شود. ODE بدین‌صورت را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

در طرح NSFD، بدین‌صورت گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\phi(h)}$$

که  $\phi$  تابعی از طول گام  $h = \Delta t$  است و مادامی که  $h \rightarrow 0$  در خاصیت  $\phi(h) = h + O(h^2)$  صدق می‌کند.

همچنین میکنز برای  $\phi(h)$  توابع  $1 - e^h$ ،  $\sinh(h)$ ،  $\sin(h)$  و  $h$  را در نظر گرفته است [۲]، [۳]. به‌راحتی می‌توان این نوع گسسته‌سازی را برای مشتقات نسبی تعمیم داد. به‌عنوان مثال برای  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$  و  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  می‌توان این روابط را در نظر گرفت:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u_{m+1}^k - u_{m-1}^k}{\phi(\Delta x)},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{u_m^{k+1} - 2u_m^k + u_m^{k-1}}{\phi(\Delta t^2)},$$

که

$$\phi(\Delta x) = \Delta x + O(\Delta x^2), \quad \phi(\Delta t) = \Delta t^2 + O(\Delta t^4).$$

### حسابان کسری

در این قسمت عملگر  $D$  را برای مشتق از مرتبه هر عدد حقیقی تعمیم می‌دهیم. یکی از تعاریف مشتق کسری تعریف گرانوالد-لنتیکوف است [۱]. گرانوالد-لنتیکوف فرمول کلی موجود برای مشتق را بدین‌صورت تعمیم داد:

$$D^\alpha u(x) = \lim_{h \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(x - kh)}{h^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

در این تعریف باید به دو نکته توجه کرد، نخست این که کران بالای مجموع، یعنی  $m$ ، باید به‌سمت بی‌نهایت برود و از آن‌جا که لزومی ندارد که  $\alpha$  صحیح باشد، جملات مجموع برای  $k$ های مختلف صفر نمی‌شود.

1. Mickens  
2. Mommani  
3. Ordinary Differential Equation

همچنین مفهوم انتگرال نیز از تعریف مذکور نتیجه می شود. به عنوان مثال برای  $\alpha = -1$  داریم:

$$D^{-1}u(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1)} u(x-kh)}{h^{(-1)}},$$

$$D^{-1}u(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} h \sum_{k=0}^m u(x-kh),$$

رابطه مذکور تعریف انتگرال ریمان است. به طور کلی برای هر عدد حقیقی  $\alpha$ ، مشتق و یا انتگرال از مرتبه  $\alpha$  با تعریف گرانوالد-لنتیکوف بدین صورت است:

$${}_c D_x^\alpha u(x) = \lim_{mh=cx} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(x-kh)}{h^\alpha},$$

که  $c$  کران پایین انتگرال ریمان است.

تعاریف دیگری را برای مشتقات کسری افرادی مانند ریمان-لیوویل و کاپتو معرفی کردند که مشتقات کسری ریمان-لیوویل از مرتبه غیرطبیعی  $\alpha$  برای تابع  $u(x,t)$  در بازه  $[a,b]$  بدین صورت تعریف می شود [۱]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^x \frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}} d\xi, \quad n = [\alpha].$$

و همین طور مشتقات کسری کاپتو از مرتبه  $\gamma$  ( $m-1 < \gamma < m$ ) نسبت به  $t$  برای تابع  $u(x,t)$  در بازه  $[0,T]$  بدین صورت تعریف می شود [۱]:

$$\frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial t^\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^t \frac{u^{(m)}(\eta)}{(t-\eta)^{\gamma+1-m}} d\eta, & m-1 < \gamma < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} u(t), & \gamma = m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**قضیه ۱.** دو تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل و گرانوالد-لنتیکوف معادل یکدیگرند.

اثبات. به [۱] مراجعه شود.

همچنین برای  $0 < \gamma < 1$  مشتقات کسری روی بازه  $[0,L]$  در نقطه ابتدا و انتهای بازه بدین صورت تعریف می شوند [۴]:

$${}_0 D_x^\gamma u(x) = \frac{u(0)x^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^x \frac{u'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^\gamma}, \quad (1)$$

$${}_x D_L^\gamma u(x) = \frac{u(L)(l-x)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_x^L \frac{u'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^\gamma}. \quad (2)$$

با استفاده از قضیه ۱، جمله دوم سمت راست رابطه (۱) را می توان با در نظر گرفتن  $h = L/N$  و

بدین صورت تقریب زد:  $x_l = lh, 0 \leq l \leq N$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^x \frac{u'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^x \frac{u'(x-\xi)d\xi}{\xi^\gamma}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{u'(x-\xi)d\xi}{\xi^\gamma}$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{u(x-jh) - u(x-(j+1)h)}{h} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{d\xi}{\xi^\gamma}$$

$$= \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{l-1} (u_{l-j} - u_{l-j-1}) [(j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}].$$

بنا بر این تقریب مشتق برای نقطه ابتدای بازه به ازای  $0 < \gamma < 1$  بدین صورت نمایش داده می شود:

$${}_0D_x^\gamma u(x_l) = \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \left\{ \frac{(1-\gamma)u_0}{1^\gamma} + \sum_{j=0}^{l-1} (u_{l-j} - u_{l-j-1}) [(j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}] \right\}. \quad (3)$$

به طور مشابه از رابطه (۲) می توان تقریبی برای مشتق کسری در نقطه انتهای بازه بدین صورت به دست آورد:

$${}_xD_L^\gamma u(x_l) = \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \left\{ \frac{(1-\gamma)u_N}{(N-1)^\gamma} + \sum_{j=0}^{N-l-1} (u_{l+j} - u_{l+j+1}) [(j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}] \right\}.$$

مشتقات مرتبه کسری اغلب به طور تحلیلی به سختی قابل محاسبه هستند. به همین دلیل در بیشتر موارد به طور عددی محاسبه می شوند. یکی از سادهترین محاسبه‌ها با تعریف گرانوآلد-لتنیکوف صورت می‌گیرد به این ترتیب که با توجه به تعریف گرانوآلد-لتنیکوف برای مشتق مرتبه کسری، این رابطه برای محاسبه تقریبی مشتق مرتبه کسری به کار می‌رود:

$${}_cD_x^\alpha u(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-c}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(x - kh)}{h^\alpha},$$

حالت سادهتر رابطه مذکور بدین صورت نوشته می‌شود:

$${}_cD_x^\alpha u(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-c}{h} \rfloor} c_k^\alpha u(x - kh),$$

که در آن  $h$  طول گام،  $[.]$  تابع جزء صحیح و  $c_k^\alpha$  ضرایب گرانوآلد-لتنیکوف هستند که بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$c_k^\alpha = h^{-\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ضرایب  $c_k^\alpha$  به طور بازگشتی بدین صورت قابل محاسبه هستند:

$$c_0^\alpha = h^{-\alpha}, \quad c_k^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{k}\right) c_{k-1}^\alpha, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

### گسسته‌سازی FPDE با روش تفاضلات متناهی غیر استاندارد

FPDE خطی زیر را با شرایط اولیه و مرزی داده شده در نظر بگیرید،

$$\beta_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial t^\gamma} + \beta_3 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta_4 \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = f(x,t),$$

$$a < x < b, \quad 0 < \gamma \leq 2, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4)$$

$$u(a,t) = \psi_1(t), \quad u(b,t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t < T,$$

$$u(x,0) = \xi_0(x), \quad a \leq x \leq b,$$

که به ازای  $i = 1, 2, 3, 4$ ،  $\beta_i > 0$ .

با استفاده تقریب مشتق کاپتو برای گسسته‌سازی مشتق زمان و تعریف ریمان-لیوویل برای گسسته‌سازی مشتق مکان و با در نظر گرفتن  $\Delta x = \Delta t = h$  این رابطه حاصل می شود:

$$\frac{\partial^\gamma u(x_i, t_{k+1})}{\partial t^\gamma} = \frac{(h)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x_i, t_{k+1-j}) - u(x_i, t_{k-j})],$$

که

$$b_j^\gamma = (j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n).$$

و

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1})}{\partial x^\alpha} = \sum_{j=0}^{i+1} c_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}),$$

و با پیاده‌سازی طرح NSFD برای گسسته‌سازی  $\frac{\partial u}{\partial x}$  و  $\frac{\partial u}{\partial t}$  داریم:

$$\frac{\partial u(x_i, t_{k+1})}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\phi_1(h)},$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_{k+1})}{\partial x} = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{\phi_2(h)},$$

که توابع  $\phi_1$  و  $\phi_2$  در این رابطه صدق می‌کنند:

$$\phi_1(h) = \phi_2(h) = h + O(h^2),$$

طرح NSFD برای گسسته‌سازی  $\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1})}{\partial x^\alpha}$ ، بدین‌صورت است که اولین ضریب مشتق کسری گرانوالد-لنتیکوف به‌جای  $h^{-\alpha}$ ،  $c_0^\alpha = \phi_3^{-\alpha}(h)$  در نظر گرفته می‌شود، همچنین برای گسسته‌سازی  $\frac{\partial^\gamma u(x_i, t_{k+1})}{\partial t^\gamma}$

$\phi_4^{-\gamma}(h)$  جای‌گزین  $h^{-\gamma}$  می‌شود که توابع  $\phi_3$  و  $\phi_4$  در این رابطه صدق می‌کنند:

$$\phi_3(h) = \phi_4(h) = h^2 + O(h^4).$$

با جای‌گذاری روابط مذکور در رابطه (۴) و با در نظر گرفتن  $\phi_1 = \phi_2$  و  $\phi_3 = \phi_4$  این معادله به‌دست می‌آید:

$$\beta_1 \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\phi_1(h)} + \beta_2 \frac{\phi_3^{-\gamma}(h)}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x_i, t_{k+1-j}) - u(x_i, t_{k-j})]$$

$$= -\beta_3 \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{\phi_1(h)} - \beta_4 \sum_{j=0}^{i+1} c_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) + f_i^{k+1},$$

بعد از انجام عملیات ریاضی داریم:

$$\beta_1 \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\phi_1(h)} + \beta_2 \frac{\phi_3^{-\gamma}(h)}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u_i^{k+1-j} - u_i^{k-j}] = -\beta_3 \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{\phi_1(h)} - \beta_4 \sum_{j=0}^{i+1} c_j^\alpha u_{i+1-j}^{k+1} + f_i^{k+1},$$

یا

$$a u_i^{k+1} - a_2 u_{i-1}^{k+1} + a_3 \left( \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{i+1} c_j^\alpha u_{i+1-j}^{k+1} \right) = \beta_1 u_i^k + \beta_2 a_1 [b_k^\gamma u_i^0 + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u_i^{k-j}] + \phi_1(h) f_i^{k+1}, \quad (۵)$$

که

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\phi_3^{-\gamma}(h)\phi_1(h)}{\Gamma(2-\gamma)}, \\ a_2 = \beta_3, \\ a_3 = -\beta_4\phi_1(h), \\ a = \beta_1 + \beta_2 a_1 + a_2 + \alpha a_3. \end{cases}$$

و با در نظر گرفتن  $b_j^\gamma = (j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}$  در رابطه (۳) داریم:

$$\begin{cases} b_0^\gamma = 1, b_j^\gamma > 0, & j = 1, 2, \dots \\ b_j^\gamma > b_{j+1}^\gamma, & j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

اگر بردار مجهولات به صورت  $\mathbf{u}^{(k)} = [u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_{m-1}^{(k)}]$  و شرایط مرزی به صورت  $u_0^{(k)} = \psi_1(k\Delta t)$

و  $u_m^{(k)} = \psi_2(k\Delta t)$  در نظر گرفته شوند، رابطه (۵) به یک دستگاه معادلات خطی بر حسب بردار مجهولات  $\mathbf{u}$

تبدیل می شود که ماتریس ضرایب آن عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} a & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & a & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -a_2 & a & a_3 \\ 0 & \dots & 0 & -a_2 & a & \end{bmatrix}$$

چنانکه ملاحظه می شود ماتریس ضرایب دستگاه (۵) یک ماتریس قالب قطری اکید با درایه های قطری مثبت و

غیرقطری منفی است [۵] از این رو این ماتریس معکوس پذیر و دستگاه (۵) جواب یکتا دارد.

### بررسی پایداری

در این بخش لم هایی را در راستای بررسی پایداری FPDE مطرح و اثبات می کنیم.

**تعریف پایداری:** فرض کنید  $u_i^k$  جواب تقریبی و  $U_i^k$  جواب دقیق معادله در  $i$ -امین گره شبکه در سطر زمانی  $k$ -ام

باشد، قرار دهید  $\varepsilon_i^k = U_i^k - u_i^k$  و  $\mathbf{E}^k = \mathbf{U}^k - \mathbf{u}^k$ ، همچنین فرض کنید  $\|\mathbf{E}^k\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m-1} |\varepsilon_i^k|$ .

این صورت طرح تقاضای پایداری است اگر و فقط اگر  $\|\mathbf{E}^k\|_\infty$  کراندار باشد.

**لم ۱.** فرض کنید  $u_i^k$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, m-1$  و  $k = 1, 2, \dots, n$   $i$ -امین مؤلفه بردار جواب در سطر زمانی

$k$ -ام باشد، اگر  $|u_M^{k+1}| = \max_{1 \leq i \leq m-1} |u_i^{k+1}|$ ، آن گاه نامساوی زیر برقرار است:

$$(\beta_1 + \beta_2 a_1) \|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty \leq \left| \beta_1 u_M^k + \beta_2 a_1 [b_k^\gamma u_M^0 + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u_M^{k-j}] + \phi_1(h) f_M^{k+1} \right|.$$

اثبات. طبق فرض  $\|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty = |u_M^{k+1}|$ ، داریم:

$$(\beta_1 + \beta_2 a_1) \|\mathbf{u}^{k+1}\|_\infty = |(\beta_1 + \beta_2 a_1) u_M^{k+1}|$$

حال با توجه به رابطه (۵)، می توان نوشت:

$$|(\beta_1 + \beta_2 a_1) u_M^{k+1}| \leq (a - a_2 + a_3) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{i+1} c_j^\alpha |u_M^{k+1}|$$

و از این که  $\sum_{j=0}^{i+1} c_j^\alpha < 0$  و  $a_3 < 0$ ، با استفاده از نامساوی مثلث این نتیجه به دست می آید:

$$\begin{aligned} (a - a_2 + a_3 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{i+1} c_j^\alpha) |u_M^{k+1}| &\leq a |u_M^{k+1}| - a_2 |u_{M-1}^{k+1}| + a_3 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{i+1} c_j^\alpha |u_{M+1-j}^{k+1}| \\ &\leq \left| a u_M^{k+1} - a_2 u_{M-1}^{k+1} + a_3 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{i+1} c_j^\alpha u_{M+1-j}^{k+1} \right|, \end{aligned}$$

حال با قدر مطلق گرفتن از طرفین رابطه (۵)،

$$\begin{aligned} &\left| a u_M^{k+1} - a_2 u_{M-1}^{k+1} + a_3 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{i+1} c_j^\alpha u_{M+1-j}^{k+1} \right| \\ &= \left| \beta_1 u_M^k + \beta_2 a_1 [b_k^\gamma u_M^0 + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u_M^{k-j} + \phi_1(h) f_M^{k+1}] \right|. \end{aligned}$$

از ترکیب روابط فوق، لم اثبات می‌شود.

**لم ۲.** فرض کنید  $u_i^k$  جواب عددی رابطه (۵) برای  $k = 1, 2, \dots, n$  و  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  باشد، اگر  $\beta_1 \neq 0$  آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$(\beta_1 + \beta_2 a_1) \max_{1 \leq j \leq k} \|u^k\|_\infty \leq (\beta_1 + \beta_2 a_1) \|u^0\|_\infty + k \phi_1(h) \|f\|_\infty.$$

**اثبات.** مجدداً فرض کنید  $|u_M^{k+1}| = \max_{1 \leq i \leq m-1} |u_i^{k+1}| = |u_M^{k+1}|$  طبق لم (۱) داریم:

$$\begin{aligned} |(\beta_1 + \beta_2 a_1) u_M^{k+1}| &\leq \left| \beta_1 u_M^k + \beta_2 a_1 [b_k^\gamma u_M^0 + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u_M^{k-j} + \phi_1(h) f_M^{k+1}] \right| \\ &\leq \left\{ \beta_1 + \beta_2 a_1 [b_k^\gamma + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma)] \right\} \max_{1 \leq j \leq k} \|u^j\|_\infty + \phi_1(h) \|f\|_\infty \\ &= (\beta_1 + \beta_2 a_1) \max_{1 \leq j \leq k} \|u^j\|_\infty + \phi_1(h) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} (\beta_1 + \beta_2 a_1) \max_{1 \leq j \leq k+1} \|u^j\|_\infty &\leq (\beta_1 + \beta_2 a_1) \max_{1 \leq j \leq k} \|u^j\|_\infty + \phi_1(h) \|f\|_\infty \\ &\leq (\beta_1 + \beta_2 a_1) \max_{1 \leq j \leq k-1} \|u^j\|_\infty + 2\phi_1(h) \|f\|_\infty \\ &\vdots \\ &\leq (\beta_1 + \beta_2 a_1) \max_{1 \leq j \leq 1} \|u^j\|_\infty + k\phi_1(h) \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

یا

$$(\beta_1 + \beta_2 a_1) \max_{1 \leq j \leq k+1} \|u^j\|_\infty \leq (\beta_1 + \beta_2 a_1) \|u^0\|_\infty + (k + 1)\phi_1(h) \|f\|_\infty.$$

**لم ۳.** در رابطه (۵) اگر  $\beta_1 = 0$  و  $\beta_2 \neq 0$  در نظر گرفته شود آنگاه برای هر  $k = 1, 2, \dots, n$ ، این نامساوی برقرار است:

$$\|u^j\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + (b_{j-1}^\gamma \beta_2 a_1)^{-1} \phi_1(h) \|f\|_\infty, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (۷)$$

**اثبات.** درستی رابطه مذکور را با استقراء روی  $j$  نشان می‌دهیم. از لم (۲) برای  $j=1$  داریم:

$$|\beta_2 a_1 u_M^1| \leq |(\beta_2 a_1 b_0^\gamma) u_M^0 + \phi_1(h) f_M^1| \leq \beta_2 a_1 \|u^0\|_\infty + \phi_1(h) \|f\|_\infty$$

بنا بر این

$$\|\beta_2 a_1 u^1\|_\infty \leq \beta_2 a_1 b_0^\gamma \|u^0\|_\infty + \phi_1(h) \|f\|_\infty$$

و از رابطه (۶) داریم  $b_0^\gamma = 1$ ، از این رو،

$$\|u^1\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + (\beta_2 a_1)^{-1} \phi_1(h) \|f\|_\infty$$

حال فرض کنید رابطه (۷) برای  $j=k$  برقرار باشد، درستی رابطه (۷) برای  $j=k+1$  بررسی می‌شود، از روابط موجود در لم (۲)، می‌توان نوشت:

$$|\beta_2 a_1 u_M^{k+1}| \leq \left| \beta_2 a_1 [b_k^\gamma u_M^0 + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u_M^{k-j}] + \phi_1(h) f_M^{k+1} \right|$$

بنا بر این

$$\beta_2 a_1 \|u^{k+1}\|_\infty \leq \beta_2 a_1 [b_k^\gamma \|u^0\|_\infty + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \|u^{k-j}\|_\infty] + \phi_1(h) \|f\|_\infty$$

طبق برقراری فرض استقرا و با استفاده از رابطه (۶) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \beta_2 a_1 \|u^{k+1}\|_\infty &\leq \beta_2 a_1 [b_k^\gamma \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \|u^0\|_\infty \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) (b_k^\gamma \beta_2 a_1)^{-1} \phi_1(h) \|f\|_\infty + \phi_1(h) \|f\|_\infty, \end{aligned} \quad (۸)$$

حال با تقسیم طرفین رابطه (۸) به  $\beta_2 a_1$  این نتیجه به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \|u^{k+1}\|_\infty &\leq \left[ b_k^\gamma \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \right] \|u^0\|_\infty \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) (b_k^\gamma \beta_2 a_1)^{-1} \phi_1(h) \|f\|_\infty + (b_k^\gamma \beta_2 a_1)^{-1} \phi_1(h) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} \|u^{k+1}\|_\infty &\leq \|u^0\|_\infty + [b_k^\gamma + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma)] (b_k^\gamma \beta_2 a_1)^{-1} \phi_1(h) \|f\|_\infty \\ &= \|u^0\|_\infty + (b_k^\gamma \beta_2 a_1)^{-1} \phi_1(h) \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

بنا بر این

$$\|u^j\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + (b_{j-1}^\gamma \beta_2 a_1)^{-1} \phi_1(h) \|f\|_\infty, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (۹)$$

همچنین از رابطه (۶) می‌توان به راحتی نشان داد:

$$(b_k^\gamma)^{-1} \leq \rho k^\gamma, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0 < \gamma \leq 1),$$

بنا بر این رابطه (۹) را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\|u^j\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + \omega (j \phi_1(h))^\gamma \phi_1(h) \|f\|_\infty, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{که } \omega = \rho \beta_2^{-1} \Gamma(2 - \gamma).$$



**قضیه ۲.** طرح تفاضلی (۵) با شرایط مرزی دیریکله مفروض به صورت غیرمشروط پایدار است. اثبات. به ازای  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  و  $k = 1, 2, \dots, n$  قرار دهید  $\varepsilon_i^k = U_i^k - u_i^k$ ، که جواب تقریبی و  $U_i^k$  جواب دقیق معادله (۴) در  $i$ -امین گره شبکه سطر زمانی  $k$ -ام باشد. همچنین فرض کنید  $\|E^k\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m-1} |\varepsilon_i^k|$ ، به راحتی از لم های ۲ و ۳ می توان نتیجه گرفت  $\|E^k\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty$ ، بنا بر این طرح تفاضلی (۵) به صورت غیرمشروط پایدار است.

### نتایج عددی

**مثال (۱):** برای اثبات کارایی روش NSFD، این روش را برای معادله موج کسری به این شکل به کار می بریم:

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial u}{\partial x} = g(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad (10)$$

$$g(x, t) = \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sin x + t \cos x,$$

شرایط اولیه و مرزی بدین صورت در نظر گرفته می شوند:

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(0.5, t) = 0.47943t.$$

جواب دقیق این معادله، عبارت است از [۶]:

$$u(x, t) = t \sin x.$$

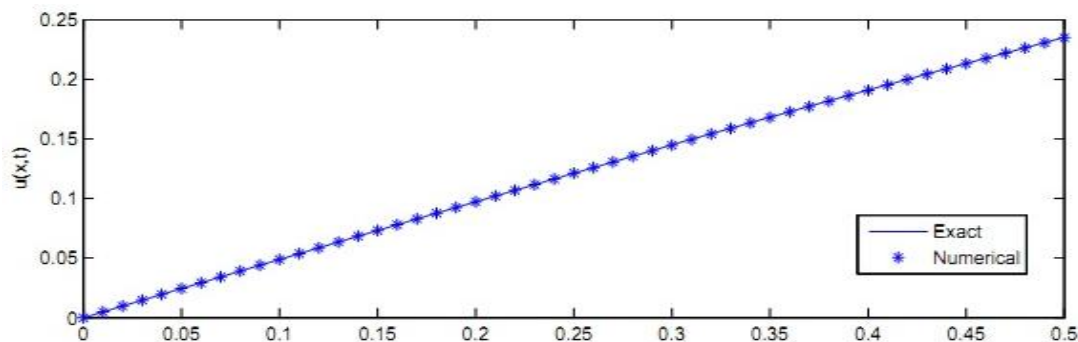
واضح است که معادله (۱۰) با در نظر گرفتن  $\beta_2 = \beta_3 = 1$  و  $\beta_4 = \beta_1 = 0$  در رابطه  $G$  (۴)، به دست می آید، بنا بر این معادله تفاضلی به این شکل حاصل می شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_m^{k-n} + \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{\phi_1(\Delta x)} = g_m^k, \quad \Delta x = \Delta t = h.$$

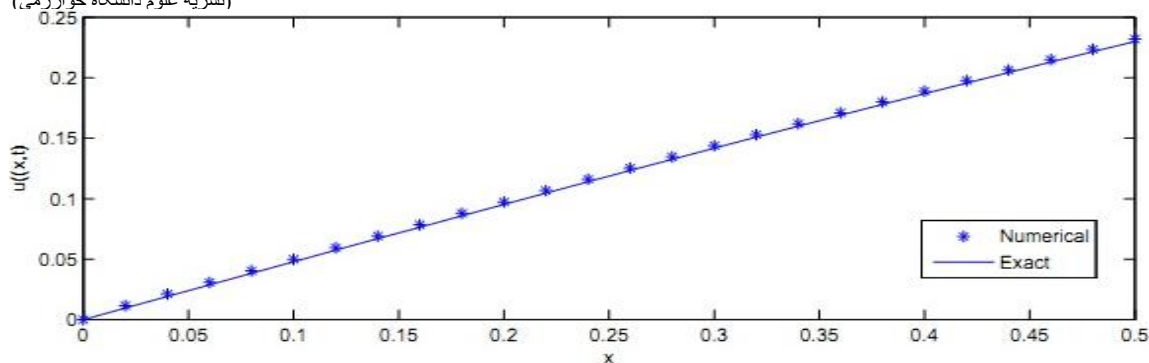
$$u_{m+1}^k = 2 \left( g_m^k - c_0 u_m^k + \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_m^{k-n} \right) \phi_1(h) + u_{m-1}^k,$$

که  $c_0 = \frac{1}{2} \phi_1(h)^{-\gamma}$  و تابع  $\phi_1(h)$  را می توان به صورت  $\phi_1(h) = e^h - 1$  در نظر گرفت [۱].

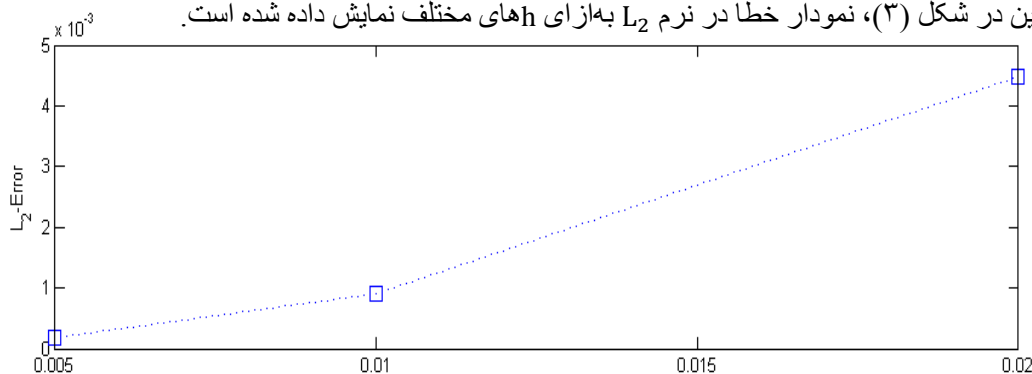
از پیاده سازی طرح تفاضلات متناهی غیر استاندارد روی معادله موج از مرتبه کسری، در بازه مکانی  $[0, 0.5]$  با  $\gamma = 0.9$  و  $h$  های مختلف جواب عددی با دقت قابل قبول حاصل می شود. در شکل های (۱) و (۲) جواب های دقیق و عددی حاصل شده با طول گام های متفاوت  $h = 0.01$  و  $h = 0.02$  مقایسه می شوند.



شکل ۱. مقایسه جواب دقیق با جواب به دست آمده از طرح تفاضلات متناهی غیر استاندارد به ازای  $m=50$  در  $t=0.5$



شکل ۲. مقایسه جواب دقیق با جواب به‌دست آمده از طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد به‌ازای  $m=25$  در  $t=0.5$  شکل‌های (۱) و (۲) نمایش نمودار مقایسه‌ی جواب حاصل از طرح NSFD با جواب دقیق مسئله هستند که به‌ترتیب به‌ازای ۵۰ و ۲۵ نقطه‌ی گره که به‌طور یکنواخت در بازه  $[0, 0.5]$  توزیع شده‌اند نتیجه شده است. همچنین در شکل (۳)، نمودار خطا در نرم  $L_2$  به‌ازای  $h$ های مختلف نمایش داده شده است.



شکل ۳. نمودار خطای به‌دست آمده با  $h$ های مختلف

در جدول (۱) مرتبه طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای معادله موج کسری محاسبه و ارائه شده است.

جدول ۱. مرتبه طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای معادله موج کسری

طول گام	خطا در نرم $L_2$	مرتبه همگرایی
$h=0.02$	$0.00447221$	-
$h=0.01$	$0.0008944$	$2/322$
$h=0.005$	$0.00017$	$2/395$

مثال (۲): معادله برگر کسری زیر با شرایط اولیه و مرزی داده شده را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t), \quad t \geq 0, \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

$$q(x, t) = \frac{2t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} + 2x - 2,$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 < x < 0.5,$$

$$u(0, t) = t^2, \quad u(0.5, t) = t^2 + 0.25.$$

که جواب دقیق آن عبارت است از [۷]:

$$u(x, t) = x^2 + t^2,$$

با پیاده‌سازی طرح NSFD روی معادله برگر کسری این نتیجه به دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_m^{k-n} + \frac{u_{m+1}^k - u_{m-1}^k}{\phi_2(\Delta x)} + \frac{u_m^{k+1} + 2u_m^k - u_m^{k-1}}{\phi_3(\Delta t)} = q_m^k, \quad \Delta x = \Delta t = h.$$

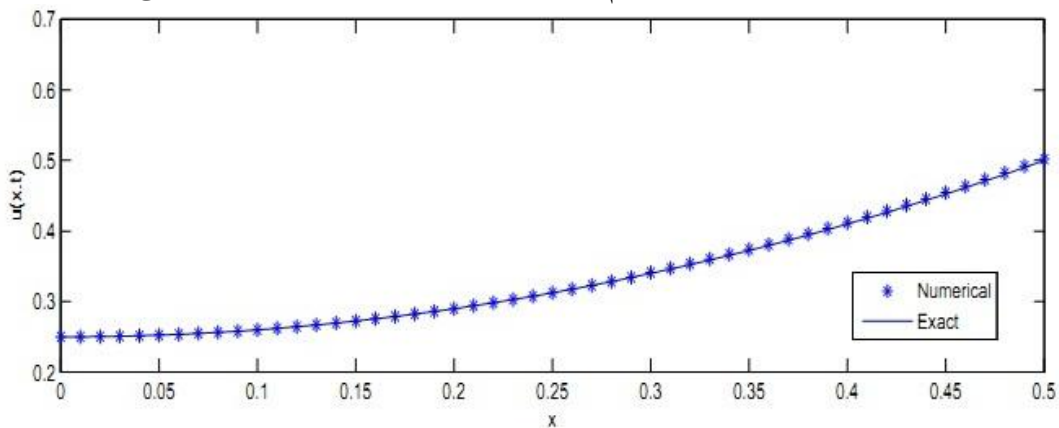
که توابع  $\phi_2$  و  $\phi_3$  بدین صورت است:

$$\phi_2 = 4 \sin^2 \frac{h}{2},$$

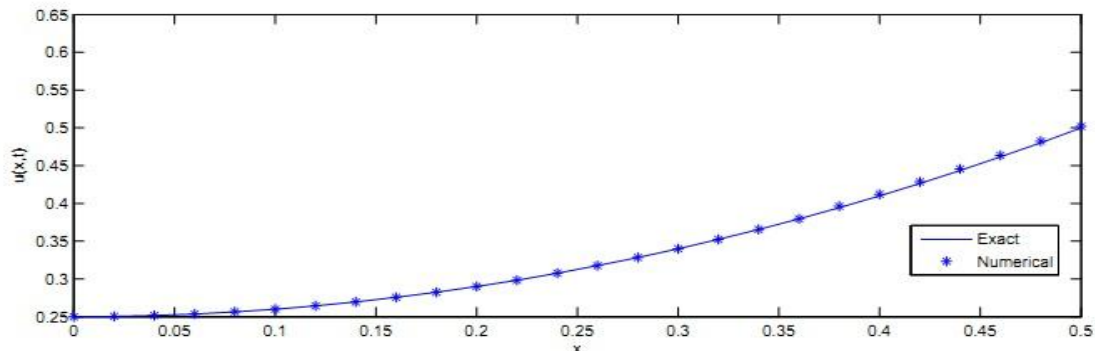
$$\phi_3 = 2 \sin h,$$

و همچنین  $c_0 = \left(\frac{1}{2}\phi_3(h)\right)^{-\alpha}$  در نظر گرفته شود [۱].

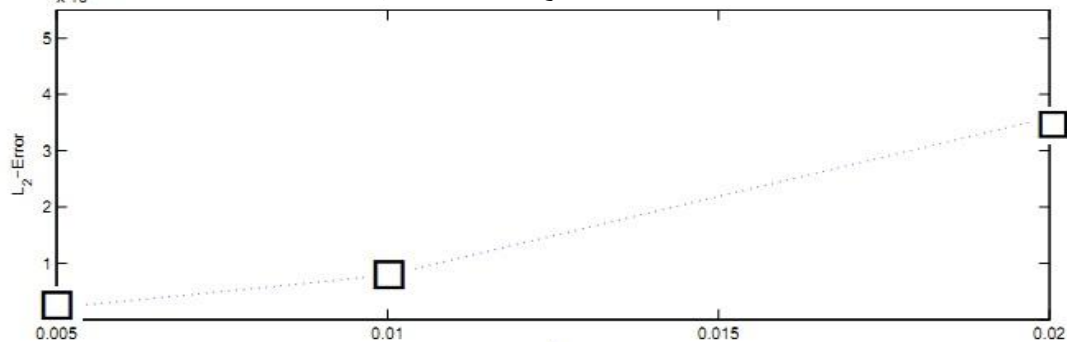
از پیاده‌سازی طرح تفاضلات متناهی غیر استاندارد روی معادله برگر از مرتبه کسری، در بازه مکانی  $[0, 0.5]$  با  $\gamma = 0.7$  و  $h$  های مختلف جواب عددی با دقت قابل قبول حاصل می‌شود. در شکل‌های ۴ و ۵ جواب‌های دقیق و عددی حاصل شده با طول گام‌های متفاوت  $h = 0.01$  و  $h = 0.02$  مقایسه می‌شوند.



شکل ۴. مقایسه جواب دقیق با جواب به دست آمده از طرح تفاضلات متناهی غیر استاندارد به ازای  $m=50$  در  $t=0.5$



شکل ۵. مقایسه جواب دقیق با جواب به دست آمده از طرح تفاضلات متناهی غیر استاندارد به ازای  $m=25$  در  $t=0.5$



شکل ۶. نمودار خطای به دست آمده با  $h$  های مختلف

شکل‌های ۴ و ۵ نمایش نمودار مقایسه‌ی جواب به‌دست آمده از طرح NSFD با جواب دقیق مسئله است که به‌ترتیب به‌ازای ۵۰ و ۲۵ نقطه‌گره که به‌طور یکنواخت در بازه  $[0, 0.5]$  توزیع شده‌اند نتیجه شده است. همچنین در شکل ۶، نمودار خطا در نرم  $L_2$  به‌ازای  $h$ ‌های مختلف نمایش داده شده است. در جدول ۲ مرتبه‌ی روش محاسبه و ارائه شده است.

جدول ۲. مرتبه‌ی طرح تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای معادله برگر کسری

طول گام	خطا در نرم $L_2$	مرتبه همگرایی
$h = 0.02$	۰/۰۰۳۵۹۰۱	-
$h = 0.01$	۰/۰۰۰۷۸۸	۲/۱۳۷۶۶
$h = 0.005$	۰/۰۰۰۲۰۷۳۲	۱/۹۲۶۱۳

### نتیجه‌گیری

نتایج عددی به‌دست آمده از حل PDE از مرتبه‌ی کسری با طرح NSFD نشان از توافق خوب این تکنیک با تکنیک‌هایی که در گذشته برای حل این دسته از معادلات به‌کار رفته، دارند؛ و بررسی‌های دقیق‌تر مؤید این مطلب است که روش غیراستاندارد روشی قدرتمند و کارا برای حل این دسته از معادلات است. همچنین می‌توان پایداری این دسته از معادلات دیفرانسیل نسبی که به‌صورت ضمنی گسسته‌سازی می‌شوند را نتیجه گرفت [۳]. انتظار می‌رود ایده‌ی مطرح شده در این مقاله، برای PDE‌های خطی و غیرخطی از مرتبه‌ی کسری دیگر هم نتایج مشابهی ارائه کند.

### منابع

1. Podlubny I., "Fractional differential equations", Academic Press, New York (1999).
2. Mickens R.E., "Nonstandard finite difference models of differential equation", World Scientific, Singapore (1994).
3. Moaddy K., Mommani S., Hashim I., "The non-standard finite difference for linear fractional PDEs in fluid mechanics", Comput. Math. Appl., 61 (2011) 1209-1216.
4. Oldham K.B., Spanier J., "The fractional calculus", Academic Press, New York (1974).
5. Gene H. Golub, Charles F., Van Loan, "Matrix computations" Johns Hopkins university press, London (1996).
6. Odibat Z., Momani S., "The variational iteration method an efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics", Comput. Math. Appl., 58 (2009) 2199-2208.
7. Mickens R.E., "Applications of nonstandard finite difference schemes", Singapore (2000).