نشریه علوم دانشگاه خوارزمی
جلد ۱۳، شماره ۳
تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۲

تحلیل بیزی استوار و کاربرد آن در برآورد حق بیمه

نادر نعمت‌الهی*؛ دانشگاه علامه طباطبایی، گروه آمار
آزاده کیاپور؛ دانشگاه آزاد اسلامی، واحد بابل، گروه آمار

چکیده

روش‌های بیزی استوار به‌عنوان شاخه‌ای از آمار بیزی به برآورد پارامتر نامعلوم یا پیش‌گویی مشاهدهٔ آینده با تعیین کلاسی از توزیع‌های پیشین به‌جای یک توزیع پیشین یکتا می‌پردازد. به استفاده از روش‌های بیزی استوار به‌طور گسترده‌ای درعلوم بیمه‌ای برای برآورد حق بیمه و پیش‌گویی مقدار خسارت آینده توجه شده است. بدین منظور، در این تحقیق، با ارائهٔ دو کلاس از توزیع‌های پیشین تحت تابع زیان توان دوم خطای ناوردای مقیاس، به برآوردیابی بیزی استوار حق بیمه و پیش‌گویی مقدار خسارت آینده می‌پردازیم. سپس، با انجام بررسی شبیه‌سازی و با استفاده از تحلیل پیش‌گویی دنباله‌ای، به مقایسهٔ پیش‌گویی‌های بیزی استوار مقدار خسارت آینده به‌دست آمده می‌پردازیم. در پایان، حق بیمهٔ بیزی را تحت دو کلاس از توزیع‌های پیشین آمیخته برآورد و با انجام شبیه‌سازی، حساسیت نسبی حق بیمه بیزی را محاسبه و سپس آن‌ها را در کلاس‌های پیشین مقایسه می‌کنیم.

مقدمه

از مسائل اساسی در آمار بیزی، انتخاب توزیع پیشین یکتا روی فضای پارامتری است. در بسیاری از تحلیل‌های بیزی، تعیین توزیع پیشین کار دشواری است؛ زیرا اطلاعات پیشین اغلب مبهم و هر توزیع پیشین انتخاب شده تنها تقریبی از توزیع پیشین واقعی است. یکی از راه حل‌های ارائه شده برای این مسئله، روش بیزی استوار است. تحلیل بیزی استوار به‌عنوان شاخهٔ بسیار مهمی از استنباط بیزی به مسئلهٔ مدل‌بندی عدم حتمیت اطلاعات پیشین با تعیین کلاس Γ از توزیع‌های پیشین به‌جای توزیع پیشین یکتا می‌پردازد. هدف اصلی روش‌های بیزی استوار، ارائهٔ راه حل‌هایی برای برآوردیابی و پیش‌گویی است که نسبت به عدم حتمیت و عدم وجود اطلاعات کافی حساس نباشند. از مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به گاما مینیماکس (رابینز [۱]، گود [۲] و برگر [۳])، گاما مینیماکس شرطی (داس گوپتا و استودن[٤] و بترو و راگری [٥])، پایدارترین (مکزارسکی و زیلینسکی [٦] و بوراتینسکا و مکزارسکی [۷])، تأسف پسین گاما مینیماکس (زن و داس گوپتا [۸] و ریوس اینسوآ و همکاران [۹]) و حداقل حساسیت (آریاس- نیکولاس وهمکاران [۱۰]) اشاره کرد. این روش‌ها بر اساس نگرش‌های متفاوت به مسئله معرفی می‌شوند و برتری این روش‌ها بر روش‌های دیگر قابل بررسی نیست.

واژه‌های کلیدی: پیش‌گویی مقدار خسارت، توزیع گاما، حق بیمه بیزی استوار، کلاس توزیع‌های پیشین
دریافت ۹۲/۵/١٤ پذیرش ۹۲/۱۱/۱
***نویسنده مسئول** nematollahi@atu.ac.ir

از مسائل اساسی در علوم بیمه، تعیین حق بیمه و پیش‌بینی مقدار خسارت آینده مربوط به هر رشته است؛ زیرا یکی از مهم‌ترین منابع درآمد شرکت‌های بیمه، حق بیمه‌هایی است که از طریق صدور و فروش بیمه‌نامه‌ها در رشته‌های مختلف از قبیل آتش‌سوزی، باربری و اتومبیل به‌دست می‌آورد. یک اصل در محاسبهٔ حق بیمه عبارت است از تابعی که به مقدار خسارت، یک عدد حقیقی اختصاص می‌دهد. در موقعیت‌های کاربردی، حق بیمه با فرض معلوم بودن توزیع مقدار خسارت، معلوم است. حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن توزیع مقدار خسارت با پارامتر نامعلوم θ مشخص می‌شود و حق بیمه را با $P(\theta)$ نشان می‌دهیم.

در ادبیات تحقیق روش‌های مختلفی به‌منظور برآورد حق بیمه $P(\theta)$ یا پیش‌گویی مقدار خسارت آینده وجود دارد. یکی از رایج‌ترین روش‌ها، برآوردیابی و پیش‌گویی بیزی است. تحلیل بیزی استاندارد در بسیاری از کاربردهای علوم بیمه استفاده شده است، که از آن جمله می‌توان به آیزنهاور و همکاران [۱۱]، هیلمن [۱۲] و گومز- دنیز [۱۳] اشاره کرد. در تحلیل‌های بیزی برای مدل‌بندی زیان ناشی از خسارت‌های بیمه‌ای، معمولاً محقق یک توزیع پیشین روی فضای پارامتر در نظر می‌گیرد. در بسیاری از تحلیل‌های بیزی، تعیین توزیع پیشین کار دشواری است و دقیقاً نمی‌توان یک توزیع پیشین یکتا را که انعکاس‌دهندهٔ اطلاعات پیشین در مورد پارامتر مدل مورد نظر است به‌دست آورد. روش معمول، استفاده از روش بیزی استوار است که در دو دههٔ اخیر، به‌طور گسترده‌ای در علوم بیمه برای برآورد حق بیمه و پیش‌گویی مقدار خسارت آینده به‌کار گرفته شده است؛ برای مثال، ریوس و همکاران [۱۴]، گومز- دنیز و همکاران [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، بوراتینسکا [۲۰] با استفاده از تابع زیان‌های توان دوم خطا و لاینکس، به برآوردیابی بیزی استوار حق بیمه نامعلوم $P(\theta)$ و پیش‌گویی مقدار خسارت آینده پرداختند.

تابع‌های زیان توان دوم خطا و لاینکس پایای مکان هستند و برای برآورد پارامتر مکان مناسب هستند. اگر حق بیمه $P(\theta)$ تابعی خطی از پارامتر مقیاس θ باشد، آن‌گاه تابع‌های زیان مذکور برای برآورد آن مناسب نیستند. در این تحقیق با استفاده از تابع زیان توان دوم خطای ناوردای مقیاس به برآوردیابی حق بیمه نامعلوم (که ترکیبی خطی از پارامتر مقیاس مدل گاما است) و پیش‌گویی مقدار خسارت آینده می‌پردازیم. برآوردگرها و پیش‌گوهای گاما مینیماکس[۱] (GM)، گاما مینیماکس شرطی[۲] (CGM)، پایدارترین[۳] (MS)، تاسف پسین گاما مینیماکس[۴] (PRGM) و حداقل حساسیت[۵] (LS) را تحت مدل گاما به‌دست می‌آوریم.

در این مقاله ابتدا تعاریف و مفاهیم اولیهٔ حق بیمه، روش محاسبهٔ حق بیمه، برآوردگرهای بیزی و بیزی استوار حق بیمه تحت تابع زیان توان دوم خطا ناوردای مقیاس را بیان می‌کنیم. سپس حق بیمه، برآوردگرهای بیزی و بیزی استوار در مدل گاما تحت تابع زیان توان دوم خطا ناوردای مقیاس را به‌دست می‌آوریم. همچنین پیش‌گوهای بیزی و بیزی استوار مقدار خسارت در مدل گاما به‌دست می‌آیند.

---
۱. Gamma Minimax ۲. Conditional Gamma Minimax ۳. Stable

٤. Posterior Regret Gamma Minimax ۶. Least Sensitive

سپس با انجام بررسی شبیه‌سازی و با استفاده از تحلیل پیش‌گویی دنباله‌ای، به مقایسهٔ پیش‌گوهای بیزی و بیزی استوار مقدار خسارت آینده می‌پردازیم. در پایان، دو کلاس از توزیع‌های پیشین آمیخته را که یکی شامل همهٔ توزیع‌های پیشین و دیگری شامل توزیع‌های پیشین تک مدی است، در نظر می‌گیریم. در این کلاس‌ها، ابتدا حق بیمه بیزی را برآورد می‌کنیم. سپس با شبیه‌سازی، حدود تغییرات حق بیمه بیزی و حساسیت نسبی آن را محاسبه و در دو کلاس ارایه شده مقایسه می‌کنیم.

محاسبه و برآورد حق بیمه

حق بیمه عبارت است از مبلغی که بیمه‌گذار (مشتری) بابت خرید بیمه به بیمه‌گر می‌پردازد تا بیمه‌گر در صورت وقوع حادثه، خسارت وارده بر او را جبران کند و تعیین آن از مسائل اساسی در صنعت بیمه است. اگر خسارت واقع شده در اثر تصادف، آتش‌سوزی و... مشخص باشد می‌توان حق بیمه را به‌طور مناسبی تعیین کرد، به‌طوری‌که مقدار خسارت واقعی را تا حدود زیادی جبران کند.

در نظریهٔ مخاطره، روند محاسبهٔ حق بیمه بدین‌صورت مدل‌بندی می‌شود: مقدار خسارت یا میزان زیان یک قرارداد بیمه در یک دوره با متغیر تصادفی $X \in \chi$ مشخص می‌شود که دارای تابع چگالی $f(x\,|\,\theta)$ وابسته به پارامتر نامعلوم $\theta \in \Theta$ است و برای آن توزیع پیشین $\pi(\theta)$ در نظر گرفته می‌شود. یک اصل در محاسبهٔ حق بیمه (هیلمن [۱۲]) عبارت است از تابعی مانند P که به مقدار خسارت X عددی حقیقی را اختصاص می‌دهد. فرض کنید x مقدار مشاهده شده X و D مجموعهٔ همهٔ تابع‌های (عمل‌های) P و $L{:}R^2 \to R$ تابع زیانی باشد که به هر $(x,P) \in \mathrm{R}^{۲}$، زیانی را اختصاص می‌دهد که بیمه‌گر بابت انتخاب عمل P در مواجهه با پیشامد x می‌پردازد. حق بیمه $P\,(\theta)$ با حداقل کردن زیان مورد انتظار $E[L(X,P)]$ نسبت به $P \in D$ محاسبه می‌شود. در این مقاله، برای محاسبهٔ حق بیمه ابتدا تابع زیان توان دوم خطای ناوردای مقیاس را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$L(X,P) = \left(\frac{P}{X} - ۱\right)^{۲}, \qquad (۱)$$

این تابع زیان تابعی متقارن و اکیداً محدب از $\Delta = \dfrac{P}{X}$ و دارای نقطهٔ مینیمم یکتا در نقطهٔ $\Delta = ۱$ است. مخاطرهٔ مورد انتظار بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$E[L(X,P)\,|\,\theta] = P^{۲}E[\frac{۱}{X^{۲}}\,|\,\theta] + ۱ - ۲PE[\frac{۱}{X}\,|\,\theta] \qquad (۲)$$

حق بیمه $P\,(\theta)$ از طریق حداقل کردن مخاطرهٔ مورد انتظار (۲) نسبت به P تحت تابع زیان (۱) بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$P(\theta) = \frac{E[\frac{۱}{X}\,|\,\theta]}{E[\frac{۱}{X^{۲}}\,|\,\theta]}. \qquad (۳)$$

واضح است که اصل محاسبهٔ حق بیمه، فقط زمانی به‌کار می‌رود که توزیع X معلوم باشد. در این پژوهش، فرض می‌کنیم X مقدار خسارت و به شرط θ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم ν و پارامتر مقیاس نامعلوم θ با تابع چگالی احتمال بدین‌صورت باشد:

$$f(x\,|\,\theta,\nu)=\frac{1}{\Gamma(\nu)\theta^{\nu}}x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{\theta}},\quad x>0,\ \ \nu>0,\ \ \theta>0. \tag{4}$$

در این صورت با استفاده از رابطهٔ (۳) حق بیمه $P(\theta)$ برای مدل (۴) عبارت است از:

$$P(\theta)=\frac{\Gamma(\nu-1)/\Gamma(\nu)\theta}{\Gamma(\nu-2)/\Gamma(\nu)\theta^{2}}=(\nu-2)\theta=u\theta$$

که در آن $u=\nu-2$ و حق بیمه $P(\theta)$ تابعی خطی از پارامتر مقیاس نامعلوم θ مدل (۴) است. در نظر گرفتن توزیع گاما برای مقدار خسارت X معقول است؛ زیرا عملاً مقدار خسارت‌های کوچک زیاد، و مقدار خسارت‌های بزرگ کم است، از همین رو، توزیع چوله به‌راست از نوع گاما برای X مناسب است. مسئلهٔ برآورد حق بیمه $P(\theta)$ تحت بعضی تابع‌های زیان، مانند توان دوم خطا، نمایی و لاینکس در ادبیات تحقیق بررسی شده است (هیلمن [۱۲] و گومز- دنیز [۱۹]). این تابع‌های زیان برای برآورد پارامترهای مکانی مناسب هستند. حال اگر $P(\theta)$ تابعی خطی از پارامتر مقیاس θ باشد آن‌گاه تابع‌های زیان فوق برای برآوردیابی مناسب نیستند. به این‌منظور برای برآورد حق بیمه نیز تابع زیان توان دوم خطای ناوردای مقیاس را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$L(P(\theta),P)=\left(\frac{P}{P(\theta)}-1\right)^{2}, \tag{5}$$

که در آن P یک برآورد از $P(\theta)$ بر اساس مقدار خسارت مشاهده شده X تحت تابع زیان (۵) است.

۱. برآورد بیزی حق بیمه

اگر اطلاعات مقدار خسارت در طول دوره‌های قبلی بیمه‌نامه، $\mathbf{x}^n=(x_1,\dots,x_n)$، در اختیار باشد، بیمه‌گر نمونهٔ $\mathbf{x}^n$ از مقدار خسارت در گذشته را اختیار کرده و از این اطلاعات برای برآورد حق بیمه نامعلوم $P(\theta)$ استفاده می‌کند. روش بیزی یکی از روش‌های محاسبهٔ حق بیمه نامعلوم $P(\theta)$ است که به‌وسیلهٔ آن حق بیمه بیزی به‌عنوان مقداری تعیین می‌شود که زیان مورد انتظار را با توجه به توزیع پسین حداقل می‌کند.

فرض کنید X_i مقدار خسارت سال i ام، $i=1,2,\dots$ و $X_1,X_2,\dots$ دنباله‌ای از مقدار خسارت‌های تصادفی و $\mathbf{X}^n=(X_1,\dots,X_n)$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $X_1,X_2,\dots$ به‌طور تصادفی به‌شرط θ از هم مستقل و هم‌توزیع باشند. می‌خواهیم $P(\theta)$ را تحت تابع زیان (۵) بر اساس $P\in D$ برآورد کنیم، که در آن D مجموعهٔ تمام برآوردگرهایی است که تابع مخاطرهٔ آن‌ها، موجود و متناهی است. حق بیمه بیزی $P(\theta)$ با حداقل کردن مخاطرهٔ پسین بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\rho(\pi,P)=E[L(P(\theta),P)\,|\,\mathbf{X}^n=\mathbf{x}^n]$$
$$=P^۲E[\frac{۱}{P^۲(\theta)}\,|\,\mathbf{x}^n]-۲PE[\frac{۱}{P(\theta)}\,|\,\mathbf{x}^n]+۱, \qquad (۶)$$

که برآورد بیزی حق بیمه نامیده می‌شود [۱۲]. با استفاده از رابطهٔ (۶) برآورد بیزی حق بیمهٔ $P(\theta)$ عبارت است از:

$$P^{\pi}(\mathbf{x}^n)=\frac{E[\frac{۱}{P(\theta)}\,|\,\mathbf{x}^n]}{E[\frac{۱}{P^۲(\theta)}\,|\,\mathbf{x}^n]}. \qquad (۷)$$

فرض کنید مقدار خسارات X_i ، $i=۱,۲,...,n$ ، به شرط θ از یک‌دیگر مستقل و دارای توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم ν و پارامتر مقیاس نامعلوم θ با تابع چگالی (۴) باشند. توزیع پیشین گامای وارونه با پارامترهای α و β ، $IGamma(\alpha,\beta^{-۱})$ ، را برای پارامتر θ بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$\pi_{\alpha,\beta}(\theta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+۱}}e^{-\frac{\beta}{\theta}},\ \ \alpha>۰,\ \ \beta>۰,\ \ \theta>۰, \qquad (۸)$$

در این‌صورت توزیع پسین θ به شرط $\mathbf{X}^n=\mathbf{x}^n$ ، دارای توزیع گامای وارونه $IGamma(a,b^{-۱})$ با پارامترهای $a=n\nu+\alpha$ و $b=\sum_{i=۱}^{n}x_i+\beta$ است. حق بیمه بیزی تحت تابع زیان (۵) از رابطهٔ (۷) عبارت است از:

$$P^{\pi}(\mathbf{x}^n)=\frac{\Gamma(a+۱)/\Gamma(a)b(\nu-۲)}{\Gamma(a+۲)/\Gamma(a)b^۲(\nu-۲)^۲}=\frac{b(\nu-۲)}{a+۱}=\frac{bu}{a+۱}. \qquad (۹)$$

۲. برآورد بیزی استوار حق بیمه

در اغلب تحلیل‌های بیزی، تعیین توزیع پیشین کار دشواری است. از آن‌جاکه اطلاعات موجود، اغلب برای تشخیص یک توزیع پیشین به‌صورت دقیق در اختیار نیست، حتمی نبودن اطلاعات پیشین می‌تواند با در نظر گرفتن کلاس Γ از توزیع‌های پیشین بررسی شود. در چنین مسائلی، استنباط بیزی استوار با ارائه روش‌هایی که نسبت به اطلاعات ناکافی در توزیع پیشین استوار است، استفاده می‌شود.

در این بخش، ابتدا برآوردگرهای بیزی استوار حق بیمه $P(\theta)$ را تعریف و سپس آن را در مدل گاما بیان شده در (۴) به‌دست می‌آوریم.

تعریف ۱. فرض کنید Γ کلاس توزیع‌های پیشین، P یک برآوردگر و $\rho(\pi,P)$ مخاطرهٔ پسین داده شده در (۶) باشد.

الف. برآوردگر P_{Γ}^{CGM} را برآوردگر گاما مینیماکس شرطی گوییم هرگاه

$$\sup_{\pi\in\Gamma}\rho(\pi,P_{\Gamma}^{CGM})=\inf_{P\in D}\sup_{\pi\in\Gamma}\rho(\pi,P).$$

برآوردگر گاما مینیماکس شرطی، چنان‌که از نام آن برمی‌آید، به‌شرط مشاهدات، زیان مورد انتظار پسین $\rho(\pi,P)$ را در کلاس Γ حداقل می‌کند.

ب. برآوردگر P_Γ^{MS} را برآوردگر پایدارترین گوییم هرگاه

$$r(P_\Gamma^{MS})=\inf_{P\in D} r(P),$$

که در آن $r(P)=\sup_{\pi\in\Gamma}\rho(\pi,P)-\inf_{\pi\in\Gamma}\rho(\pi,P)$ نوسان تابع مخاطرهٔ پسین در P و برآوردگر پایدارترین P_Γ^{MS} حداقل کنندهٔ این نوسان است.

ج. برآوردگر P_Γ^{PRGM} را برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس گوییم هرگاه

$$\sup_{\pi\in\Gamma} R(P_\Gamma^{PRGM},P^\pi)=\inf_{P\in D}(\sup_{\pi\in\Gamma} R(P,P^\pi)),$$

که در آن $R(P,P^\pi)=\rho(\pi,P)-\rho(\pi,P^\pi)$ تأسف انتخاب برآوردگر P در مقابل برآوردگر بیزی P^π است و برآوردگر P_Γ^{PRGM}، این مقدار را در کلاس Γ حداقل می‌کند.

د. برآوردگر P_Γ^{LS} را برآوردگر با حداقل حساسیت گوییم هرگاه

$$\sup_{\pi\in\Gamma}\frac{R(P_\Gamma^{LS},P^\pi)}{\rho(\pi,P^\pi)}=\inf_{P\in D}(\sup_{\pi\in\Gamma}\frac{R(P,P^\pi)}{\rho(\pi,P^\pi)}).$$

برآوردگر حداقل حساسیت، خطای نسبی زیان مورد انتظار $\rho(\pi,P)$ را وقتی که برآوردگر P را به‌جای برآوردگر بیزی P^π در نظر می‌گیریم، حداقل می‌کند.

برای به‌دست آوردن برآوردگرهای بیزی حق بیمه $P(\theta)$، فرض کنید که توزیع پیشین، دقیقاً معلوم نباشد و دو کلاس از توزیع‌های پیشین برای θ بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\Gamma_۱&=\{\pi_{\alpha_۰,\beta},\beta\in[\beta_۱,\beta_۲]\subset R^+,\ \alpha=\alpha_۰>۰\},\\ \Gamma_۲&=\{\pi_{\alpha,\beta_۰},\alpha\in[\alpha_۱,\alpha_۲]\subset R^+,\ \beta=\beta_۰>۰\},\end{aligned}\qquad (۱۰)$$

که در آن $\alpha_۰$، $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\beta_۰$، $\beta_۱$ و $\beta_۲$ مقادیر معلوم هستند. چون b تابعی صعودی از β است، بنا بر این اگر $\beta\in(\beta_۱,\beta_۲)$، آنگاه $b\in(b_۱,b_۲)$، که در آن $b_j=\sum_{i=۱}^n x_i+\beta_j=b(\beta_j)$، $j=۱,۲$. به‌طور مشابه a تابعی صعودی از a است، بنا بر این اگر $\alpha\in(\alpha_۱,\alpha_۲)$، آنگاه $a\in(a_۱,a_۲)$، که در آن:

$$a_j=\alpha_j+n\nu=a(\alpha_j)\ ،\ j=۱,۲.$$

در قضیهٔ زیر برآوردگرهای $PRGM, MS, CGM$ و LS حق بیمه در مدل گاما تحت تابع زیان (۵) و کلاس $\Gamma_۱$ را به‌دست می‌آوریم.

قضیه۱. فرض کنید... $X_۱,X_۲,$ دنباله‌ای از مقدار خسارت‌ها باشند که به شرط θ از هم مستقل و X_i ها به‌شرط θ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم ν و پارامتر مقیاس نامعلوم θ و $\Gamma_۱$ کلاس پیشین برای θ باشد. در این‌صورت برآوردهای $PRGM, MS, CGM$ و LS برای حق بیمه $P(\theta)$ تحت تابع زیان (۵) با هم برابر و عبارتند از:

$$P_{\Gamma_1}(\mathbf{x}^n)=\frac{2b_1b_2u}{(b_1+b_2)(a+1)}.$$

اثبات: تابع چگالی پیشین در کلاس Γ_1 را با π_b نشان می‌دهیم. برای به‌دست‌آوردن برآوردگر CGM، مخاطرهٔ پسین Γ_1 را از رابطهٔ (۶) به‌دست می‌آوریم، که عبارت است از:

$$\rho\left(\pi_b,P\right)=\frac{P^2a\left(a+1\right)}{b^2u^2}-2\frac{Pa}{bu}+1. \qquad (11)$$

با توجه به این‌که

$$\frac{\partial\rho(\pi_b,P)}{\partial b}=\frac{-2P^2a(a+1)}{b^3u^2}+\frac{2aP}{b^2u} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2\rho(\pi_b,P)}{\partial b^2}=\frac{6P^2a(a+1)}{b^4u^2}-\frac{4aP}{b^3u}$$

بنا بر این $\rho\left(\pi_b,P\right)$ به‌عنوان تابعی از b محدب نیست، اما در $b_{min}=\dfrac{P(a+1)}{u}$ نقطهٔ مینیمم یکتا دارد. تابع $l(P)=\rho(\pi_{b_1},P)-\rho(\pi_{b_2},P)$ تابعی پیوسته از P و $l\left(P\right)=0$ است اگر و تنها اگر

$$P=\frac{2b_1b_2u}{(b_1+b_2)(a+1)}=P^*.$$

بنا بر این داریم:

$$\sup_{b\in[b_1,b_2]}\rho(\pi_b,P)=\begin{cases}\rho(\pi_{b_1},P) & P\geq P^*\\ \rho(\pi_{b_2},P) & P\leq P^*.\end{cases}$$

توجه کنید که $\rho(\pi_b,P)$ در (۱۱) یک تابع اکیداً محدب از P است و مینیمم خود را در $P^{\pi_b}=\dfrac{bu}{a+1}$ اختیار می‌کند. چون $P^{\pi_{b_1}}=\dfrac{b_1u}{a+1}<P^*$، پس برای $P\geq P^*$، $\inf_{P\geq P^*}\rho(\pi_{b_1},P)=\rho(\pi_{b_1},P^*)$ است. به‌علاوه، چون $P^{\pi_{b_2}}=\dfrac{b_2u}{a+1}>P^*$، پس برای $P\leq P^*$، $\inf_{P\leq P^*}\rho(\pi_{b_2},P)=\rho(\pi_{b_2},P^*)$ است. بنا بر این داریم:

$$\inf_{P\in D}\sup_{b\in[b_1,b_2]}\rho(\pi_b,P)=\rho(\pi_{b_1},P^*)=\rho(\pi_{b_2},P^*)$$

که نتیجه می‌دهد

$$P_{\Gamma_1}^{CGM}(\mathbf{x}^n)=P^*=\frac{2b_1b_2u}{(b_1+b_2)(a+1)}.$$

برای یافتن برآوردگر حق بیمه MS ابتدا $\inf_{\pi\in\Gamma_1}\rho(\pi_b,P)$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به این‌که $\inf_{\pi\in\Gamma_1}\rho(\pi_b,P)=\rho(\pi_{b_{min}},P)=1-\dfrac{a}{a+1}$ تابعی از P نیست، بنا بر این داریم:

$$\inf_{P\in D}\left[\sup_{\pi\in\Gamma_1}\rho(\pi,P)-\inf_{\pi\in\Gamma_1}\rho(\pi,P)\right]=\inf_{P\in D}\sup_{\pi\in\Gamma_1}\rho(\pi,P)-\{1-\frac{a}{a+1}\},$$

که نتیجه می‌دهد $P^{MS}_{\Gamma_1} = P^{CGM}_{\Gamma_1}$.

برای یافتن برآوردگرهای حق بیمه $PRGM$ و LS کافی است مخاطرهٔ پسین برآوردگر بیزی $P^{\pi_b}(\mathbf{x}^n) = \frac{bu}{a+1}$ را محاسبه کنیم که برابر است با $\rho(\pi_b, P^{\pi_b}) = 1 - \frac{a}{a+1}$. چون مخاطرهٔ پسین برآوردگر بیزی حق بیمه $\rho(\pi_b, P^{\pi_b})$ به پارامتر b بستگی ندارد، بنا بر تعریف ۱ برآوردگرهای حق بیمه $P^{PRGM}_{\Gamma_1}$ و $P^{LS}_{\Gamma_1}$ یکسان و برابر با $P^{CGM}_{\Gamma_1}$ هستند.

در قضیهٔ زیر برآوردگرهای CGM و MS حق بیمه در مدل گاما را تحت تابع زیان (۵) و کلاس Γ_2 به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۲. فرض کنید... $X_1, X_2, ...$ دنباله‌ای از مقدار خسارت‌ها باشند که به شرط θ از هم مستقل و X_i ها به شرط θ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم ν، پارامتر مقیاس نامعلوم θ و Γ_2 کلاس پیشین برای θ باشند. در این‌صورت برآوردهای MS و CGM برای حق بیمه $P(\theta)$ تحت تابع زیان (۵) به‌ترتیب برابرند با:

$$P^{MS}_{\Gamma_2}(\mathbf{x}^n) = \frac{2bu}{a_1 + a_2 + 1},$$

$$P^{CGM}_{\Gamma_2}(\mathbf{x}^n) = \begin{cases} P^{\pi_{a_1}}(\mathbf{x}^n) & a_2 - a_1 < 1 \\ P^{MS}_{\Gamma_2}(\mathbf{x}^n) & a_2 - a_1 \geq 1, \end{cases}$$

که در آن $P^{\pi_{a_i}}(\mathbf{x}^n) = \frac{bu}{a_i + 1}, \quad i = 1, 2$ است.

اثبات: تابع چگالی پیشین در کلاس Γ_2 را با π_a نشان می‌دهیم. برای یافتن حق بیمه MS، مخاطرهٔ پسین (۱۱) را بدین‌صورت بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \rho(\pi_a, P) &= \frac{P^2 a(a+1)}{b^2 u^2} + 1 - \frac{2Pa}{bu} \\ &= A + \frac{P^2}{b^2 u^2}\left[a + \left(\frac{1}{2} - \frac{bu}{P}\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{12}$$

که در آن $A = 1 - \frac{P^2}{b^2 u^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{bu}{P}\right]^2$. با توجه به‌اینکه $\frac{\partial \rho(\pi_a, P)}{\partial a} = \frac{2P^2}{b^2 u^2}\left[a + \left(\frac{1}{2} - \frac{bu}{P}\right)\right]$ و $\frac{\partial^2 \rho(\pi_a, P)}{\partial a^2} = \frac{2P^2}{b^2 u^2} > 0$، بنا بر این $\rho(\pi_a, P)$ تابعی اکیداً محدب نسبت به a و دارای نقطهٔ مینیمم یکتا در نقطهٔ $a_{min} = \frac{bu}{P} - \frac{1}{2}$ است. فرض کنید $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2}{2}$. چون $\rho(\pi_a, P)$ تابعی درجه دو بر حسب a است، بنا بر این $\rho(., P)$ بر بازهٔ $[a_1, a_2]$ حداقل نوسان در $a_{min} = \bar{a}$ را دارد. در نتیجه داریم:

$$\frac{bu}{P^{MS}_{\Gamma_2}} - \frac{1}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

که با حل تساوی فوق نتیجه می‌شود $P_{\Gamma_۲}^{MS} = \frac{۲bu}{a_۱ + a_۲ + ۱}$.

برای یافتن برآوردگر CGM حق بیمه، ابتدا مخاطرهٔ پسین (۱۲) را در نظر می‌گیریم که تابعی اکیداً محدب از a است. تابع $l(P) = \rho(\pi_{a_۱}, P) - \rho(\pi_{a_۲}, P)$ را تعریف می‌کنیم که یک تابع پیوسته نسبت به P است و داریم $l(P) = ۰$ اگر وتنها اگر $P = \frac{۲bu}{a_۱ + a_۲ + ۱} = P_{\Gamma_۲}^{MS}$. بنا بر این داریم:

$$\sup_{a \in [a_۱, a_۲]} \rho(\pi_a, P) = \begin{cases} \rho(\pi_{a_۱}, P) & P \le P_{\Gamma_۲}^{MS} \\ \rho(\pi_{a_۲}, P) & P \ge P_{\Gamma_۲}^{MS}. \end{cases}$$

چون $P^{\pi_{a_۱}} = \frac{bu}{a_۱ + ۱} < \frac{bu}{a_۲ + ۱} = P^{\pi_{a_۲}}$ است. این حالت‌ها را داریم:

۱. اگر $P^{\pi_{a_۱}} < P_{\Gamma_۲}^{MS}$ که معادل با نامساوی $a_۲ - a_۱ < ۱$ است، آن‌گاه

$$\inf_{P \le P_{\Gamma_۲}^{MS}} \sup_{a \in [a_۱, a_۲]} \rho(\pi_a, P) = \rho(\pi_{a_۱}, P^{\pi_{a_۱}}).$$

۲. اگر $P^{\pi_{a_۱}} \le P_{\Gamma_۲}^{MS} \le P^{\pi_{a_۲}}$ که معادل با نامساوی $a_۲ - a_۱ \ge ۱$ است، آن‌گاه

$$\inf_{P \ge P_{\Gamma_۲}^{MS}} \sup_{a \in [a_۱, a_۲]} \rho(\pi_a, P) = \rho(\pi_{a_۲}, P_{\Gamma_۲}^{MS}) = \rho(\pi_{a_۱}, P_{\Gamma_۲}^{MS}).$$

بنا بر این، از حالت‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$\inf_{P \in D} \sup_{a \in [a_۱, a_۲]} \rho(\pi_a, P) = \begin{cases} \rho(\pi_{a_۱}, P^{\pi_{a_۱}}) & a_۲ - a_۱ < ۱ \\ \rho(\pi_{a_۱}, P_{\Gamma_۲}^{MS}) = \rho(\pi_{a_۲}, P_{\Gamma_۲}^{MS}) & a_۲ - a_۱ \ge ۱, \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد

$$P_{\Gamma_۲}^{CGM}(\mathbf{x}^n) = \begin{cases} P^{\pi_{a_۱}}(\mathbf{x}^n) & a_۲ - a_۱ < ۱ \\ P_{\Gamma_۲}^{MS}(\mathbf{x}^n) & a_۲ - a_۱ \ge ۱, \end{cases}$$

با توجه به این‌که نامساوی $P^{\pi_{a_۲}} > P_{\Gamma_۲}^{MS}$ معادل با نامساوی $a_۲ - a_۱ < -۱$ است و برای $a_۲ > a_۱ > ۱$ هیچ‌گاه برقرار نیست، اثبات کامل می‌شود.

پیامد ۱. محاسبهٔ برآوردگرهای $PRGM$ و LS حق بیمه وقتی توزیع پیشین θ به کلاس $\Gamma_۲$ تعلق دارد به‌عنوان مسئلهٔ باز باقی می‌ماند.

۳. انواع دیگر برآورد حق بیمه

برای به‌دست آوردن برآورد بیزی حق بیمه، باید دو مرحلهٔ مینیمم‌سازی انجام دهیم، ابتدا برای محاسبهٔ حق بیمه و سپس برای محاسبهٔ برآورد بیزی حق بیمه. البته لازم نیست که از تابع‌های زیان یکسانی در هر دو مرحله استفاده کنیم. در این بخش، ابتدا تابع‌های زیان L_i ، $i = ۱,...,۵$ ، را برای به‌دست آوردن حق بیمه به‌کار

می‌بریم و سپس تحت تابع زیان (۵)، برآوردهای بیزی و بیزی استوار حق بیمه را به‌دست می‌آوریم. تعدادی از انواع حق بیمه $P(\theta)$ که در ادبیات تحقیق تحت تابع زیان‌های مشخص و مدل گاما (۴) به‌دست آمده‌اند، عبارتند از:

الف) تحت تابع زیان $L_1(x,P)=(x-P)^2$، حق بیمه برابراست با:

$$P_1(\theta)=E(X\mid\theta)=\nu\theta=u_1\theta. \tag{13}$$

ب) تحت تابع زیان $L_2(x,P)=x(x-P)^2$، حق بیمه برابراست با:

$$P_2(\theta)=\frac{E(X^2\mid\theta)}{E(X\mid\theta)}=(\nu+1)\theta=u_2\theta. \tag{14}$$

ج) تحت تابع زیان $L_3(x,P)=(\ln x-\ln P)^2$، حق بیمه برابراست با:

$$P_3(\theta)=e^{E(\ln X\mid\theta)}=e^{\psi(\nu)}\theta=u_3\theta. \tag{15}$$

که در آن $\psi(\nu)=\dfrac{\Gamma(\nu)}{\Gamma'(\nu)}$ تابع دی گاما[1] است.

د) تحت تابع زیان $L_4(x,P)=\dfrac{x}{P}-\ln\dfrac{x}{P}-1$، حق بیمه برابراست با:

$$P_4(\theta)=E(X\mid\theta)=\nu\theta=u_4\theta. \tag{16}$$

با توجه به رابطه‌های (۱۳) تا (۱۶) مشاهده می‌شود که در هر یک از حالت‌ها برآورد حق بیمه تابعی خطی از پارامتر مقیاس نامعلوم θ است.

پیامد ۲. برای محاسبهٔ برآوردگرهای بیزی و بیزی استوار $P(\theta)=u_i\theta$، $i=1,\dots,4$ داده شده در (۱۶)-(۱۳) کافی است در قضیه‌های ۱و ۲، u را با u_i، $i=1,\dots,4$ جای‌گزین کنیم.

پیش‌گویی بیزی و بیزی استوار مقدار خسارت

شرکت‌های بیمه، به‌منظور تعیین مناسب حق بیمه در رشته‌های مختلف بیمه مانند بیمهٔ اتومبیل، بیمهٔ کارگری، احتمال ورشکستگی و غیره به پیش‌گویی مقدار خسارت آینده می‌پردازند.

یکی از هدف‌های اساسی در مدل‌سازی آماری، پیش‌گویی مشاهدهٔ آینده، X_{n+1}، بر اساس مشاهدات $\mathbf{x}^n=(x_1,\dots,x_n)$ است و روش بیزی می‌تواند این عمل را به‌خوبی انجام دهد. هدف پیش‌گویی بیزی در ادبیات بیمه، پیش‌گویی بیزی مقدار خسارت آینده X_{n+1} با استفاده از مقدار خسارت‌های گذشته $\mathbf{x}^n=(x_1,\dots,x_n)$ است. برای انجام این پیش‌گویی فرض کنید $X_1,X_2,\dots$ دنباله‌ای از مقدار خسارت‌ها باشند که به یکدیگر وابسته اما X_i ها به شرط θ از یکدیگر مستقل باشند. اگر θ دارای توزیع پیشین $\pi(\theta)$ باشد، در این‌صورت توزیع پیش‌گوی خسارت آینده X_{n+1} به شرط خسارت‌های گذشته $\mathbf{X}^n=\mathbf{x}^n$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

[1]. Digamma

$$h(x_{n+۱} \mid \mathbf{x}^n) = \int_\Theta f(x_{n+۱} \mid \theta)\pi(\theta \mid \mathbf{x}^n) d\mu(\theta). \tag{۱۷}$$

(اشپیگل‌هالتر و همکاران [۲۱] و بوراتینسکا [۲۲]). مسئلهٔ بررسی شده، پیش‌گویی $X_{n+۱}$ با $P_{n+۱} = \hat{X}_{n+۱}$ براساس مشاهدات گذشته $\mathbf{x}^n$ تحت تابع زیان پیش‌گویی بدین‌صورت است:

$$L(X_{n+۱}, P_{n+۱}) = \left(\frac{P_{n+۱}}{X_{n+۱}} - ۱\right)^۲, \tag{۱۸}$$

که در آن $P_{n+۱} \in D$. پیش‌گوی بیزی $X_{n+۱}$ با مینیمم کردن مخاطرهٔ پسین بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\rho(\pi, P_{n+۱}) = E[L(X_{n+۱}, P_{n+۱}) \mid \mathbf{X}^n = \mathbf{x}^n]$$

(۱۹)

$$= P_{n+۱}^۲ \; E\left[\frac{۱}{X_{n+۱}^۲} \mid \mathbf{x}^n\right] - ۲P_{n+۱} \; E\left[\frac{۱}{X_{n+۱}} \mid \mathbf{x}^n\right] + ۱,$$

پیش‌گوی بیزی از رابطه‌های (۱۷) و (۱۹) بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\hat{P}_{n+۱}^\pi(\mathbf{x}^n) = \frac{E\left[\frac{۱}{X_{n+۱}} \mid \mathbf{X}^n = \mathbf{x}^n\right]}{E\left[\frac{۱}{X_{n+۱}^۲} \mid \mathbf{X}^n = \mathbf{x}^n\right]}.$$

برای محاسبهٔ پیش‌گوی بیزی استوار مقدار خسارت $X_{n+۱}$، کافی است در تعریف ۱، $\rho(\pi, P)$ را با $\rho(\pi, P_{n+۱})$ و P^π را با $\hat{P}_{n+۱}^\pi$ جای‌گزین کنیم.

در مدل گاما (۴) و تحت پیشین (۸)، توزیع پسین θ به شرط $\mathbf{X}^n = \mathbf{x}^n$، دارای توزیع گامای وارونه $IGamma(a, b^{-۱})$ با پارامترهای $a = n\nu + \alpha$ و $b = \sum_{i=۱}^{n} x_i + \beta$ است. با توجه به رابطه‌های

$$E\left[\frac{۱}{X_{n+۱}} \mid \mathbf{x}^n\right] = E\left\{E\left[\frac{۱}{X_{n+۱}} \mid \theta\right] \mid \mathbf{x}^n\right\} = E\left[\frac{۱}{(\nu-۱)\theta} \mid \mathbf{x}^n\right] = \frac{a}{b(\nu-۱)},$$

و

$$E\left[\frac{۱}{X_{n+۱}^۲} \mid \mathbf{x}^n\right] = E\left\{E\left[\frac{۱}{X_{n+۱}^۲} \mid \theta\right] \mid \mathbf{x}^n\right\} = E\left[\frac{۱}{(\nu-۱)(\nu-۲)\theta^۲} \mid \mathbf{x}^n\right] = \frac{a(a+۱)}{b^۲(\nu-۱)(\nu-۲)},$$

به‌سادگی نتیجه می‌شود که پیش‌گوی بیزی مقدار خسارت $X_{n+۱}$ در مدل گاما تحت تابع زیان (۱۸) برابر است با:

$$\hat{P}_{n+۱}^\pi(\mathbf{x}^n) = \frac{bu}{a+۱}$$

که در آن $u = \nu - ۲$. توجه کنید که پیش‌گوی بیزی مقدار خسارت در توزیع گاما تحت تابع زیان (۱۸) برابر با برآورد بیزی حق بیمه $P^\pi(\mathbf{x}^n)$ است.

در قضیهٔ زیر پیش‌گوهای بیزی *PRGM, MS, CGM* و *LS* مقدار خسارت $X_{n+۱}$ را در مدل گاما و تحت تابع زیان (۱۸) به‌دست می‌آوریم

قضیه ۳. فرض کنید... $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از مقدار خسارت‌ها باشند که به شرط θ از هم مستقل و X_i ها به شرط θ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم ν، پارامتر مقیاس نامعلوم θ و Γ_1 کلاس پیشین برای θ باشد. در این‌صورت پیش‌گوهای بیزی *PRGM, MS, CGM* و *LS* مقدار خسارت X_{n+1} تحت تابع زیان (۱۸) با هم برابر و عبارتند از:

$$\hat{P}_{n+1,\Gamma_1}(\mathbf{x}^n) = \frac{2b_1b_2u}{(b_1+b_2)(a+1)}.$$

اثبات: اثبات این قضیه مشابه با اثبات قضیهٔ ۱ است.

در قضیهٔ زیر پیش‌گوهای بیزی *CGM* و *MS* مقدار خسارت X_{n+1} را در مدل گاما و تحت تابع زیان (۱۸) به‌دست می‌آوریم.

قضیه ٤. فرض کنید... $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از مقدار خسارت‌ها باشند که به شرط θ از هم مستقل و X_i ها به شرط θ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم ν، پارامتر مقیاس نامعلوم θ و Γ_2 کلاس پیشین برای θ باشند. در این‌صورت پیش‌گوهای *MS* و *CGM* مقدار خسارت X_{n+1} تحت تابع زیان (۱۸) به‌ترتیب عبارتند از:

$$\hat{P}^{MS}_{n+1,\Gamma_2}(\mathbf{x}^n) = \frac{2bu}{a_1+a_2+1}, \qquad \hat{P}^{CGM}_{n+1,\Gamma_2}(\mathbf{x}^n) = \begin{cases} \hat{P}^{\pi_{a_1}}_{n+1}(\mathbf{x}^n) & a_2 - a_1 < 1 \\ \hat{P}^{MS}_{n+1,\Gamma_2}(\mathbf{x}^n) & a_2 - a_1 \geq 1, \end{cases}$$

که در آن $i = 1,2$، $\hat{P}^{\pi_{a_i}}_{n+1}(\mathbf{x}^n) = \frac{bu}{a_i+1}$ است.

اثبات: اثبات این قضیه مشابه با اثبات قضیه ۲ است.

مقایسهٔ پیش‌گوهای مقدار خسارت

در این بخش به کمک شبیه‌سازی به مقایسهٔ عددی پیش‌گوی بیزی و پیش‌گوهای بیزی استوار مقدار خسارت X_{n+1} در کلاس‌های Γ_1 و Γ_2 به‌روش پیش‌گویی دنباله‌ای می‌پردازیم (دیوید [۲۳] و دیوید و ووک [۲۴]). فرض کنید $\hat{P}^k_{n+1}$، $k = 1,2,3,4$ به‌ترتیب بیانگر پیش‌گوی بیزی $\hat{P}^{\pi}_{n+1}(\mathbf{x}^n)$ با $\alpha = 4/5$ و $\beta = 2$، $\hat{P}_{n+1,\Gamma_1}(\mathbf{x}^n)$ با $\alpha = 4/5$ و $\beta \in [1,6]$ و $\hat{P}^{MS}_{n+1,\Gamma_2}(\mathbf{x}^n)$ و $\hat{P}^{CGM}_{n+1,\Gamma_2}(\mathbf{x}^n)$ با $\beta = 2$ و $\alpha \in [4, 4/5]$ باشند. مراحل شبیه‌سازی بدین‌صورت است:

۱. مقادیر نمونهٔ تصادفی $x_1, \ldots, x_n$ را از توزیع گاما با پارامترهای $\nu = 3$ و $\theta = 0/5,\ 1,\ 1/5$ تولید می‌کنیم.

۲. مقدار x_{n+1} از توزیع گاما در مرحلهٔ اول را تولید و سپس پیش‌گوی $\hat{P}^k_{n+1}(\mathbf{x}^n)$ را بر اساس مقادیر نمونهٔ تصادفی $\mathbf{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$ برای x_{n+1} محاسبه می‌کنیم.

۳. خطای پیش‌گویی برای مشاهده $(n+1)$ام یعنی $\left(\frac{\hat{P}^k_{n+1}(\mathbf{x}^n)}{x_{n+1}} - 1\right)^2$ را محاسبه می‌کنیم.

۴. مرحله‌های دوم و سوم را به‌ازای $n = 1, \ldots, m$ تکرار می‌کنیم که در آن ۱۰۰, ۷۰, ۵۰,(۱۰), ۱۰, ۵=*m*.

۵. میانگین خطاهای پیش‌گویی محاسبه شده در مرحلهٔ سوم را بدین‌صورت محاسبه می‌کنیم:

$$APE = \frac{۱}{m}\sum_{n=۱}^{m}\left(\frac{\hat{P}_{n+۱}^{k}(\mathbf{x}^{n})}{x_{n+۱}} - ۱\right)^{۲}. \qquad (۲۰)$$

مراحل یک تا پنج را $۱۰^{٤}$ مرتبه تکرار می‌کنیم و در نهایت میانگین خطای پیش‌گویی شبیه‌سازی شده را به عنوان معیاری برای خطای پیش‌گویی، با میانگین‌گیری از میانگین خطای پیش‌گویی داده شده در (۲۰) برای پیش‌گوهای نام برده محاسبه می‌کنیم.

میزان خطای برآورد شده برای پیش‌گوی بیزی مقدار خسارت و پیش‌گوی بیزی استوار مقدار خسارت در کلاس $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$، در جدول ۱ آورده شده است. با مقایسهٔ ستون‌های این جدول مشاهده می‌کنیم که پیش‌گوهای بیزی استوار تحت کلاس $\Gamma_۱$ و MS و CGM تحت کلاس $\Gamma_۲$ عمل‌کرد بهتری نسبت به پیش‌گوی بیزی ارائه می‌کنند.

جدول ۱. مقادیر APE شبیه‌سازی شده برای پیش‌گوهای بیزی و بیزی استوار

	$\theta=٠/٥$			
m	$\hat{P}_{n+۱}^{\pi}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۱}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۲}^{MS}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۲}^{CGM}$
٥	٠/٥٢٩٠	٠/٥٢٨٥	٠/٥٢٧٣	٠/٥٢٧٥
١٠	٠/٤٩٨٠	٠/٤٩٤٠	٠/٤٩٥٣	٠/٤٩٦٠
٢٠	٠/٥٠٣٤	٠/٥٠٢١	٠/٥٠٢٣	٠/٥٠٢٥
٣٠	٠/٥٠٠٣	٠/٤٩٩٦	٠/٥٠٠١	٠/٥٠٠٢
٤٠	٠/٥١٧٥	٠/٥١٧١	٠/٥١٦٧	٠/٥١٦٩
٥٠	٠/٤٩٨٦	٠/٤٩٨٠	٠/٤٩٨١	٠/٤٩٨٣
٧٠	٠/٤٩٩٢	٠/٤٩٩١	٠/٤٩٨٩	٠/٤٩٩٠
١٠٠	٠/٥٢٨١	٠/٥٢٨٠	٠/٥٢٦٦	٠/٥٢٦٤

	$\theta=١$			
m	$\hat{P}_{n+۱}^{\pi}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۱}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۲}^{MS}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۲}^{CGM}$
٥	٠/٥٤٠٧	٠/٥٢٥١	٠/٥٢٩٧	٠/٥٣٣٣
١٠	٠/٥٤٤٢	٠/٥٣٦٢	٠/٥٣٨٧	٠/٥٤٠٥
٢٠	٠/٥٠٤٤	٠/٤٩٧٤	٠/٥٠٠٢	٠/٥٠١٥
٣٠	٠/٥٠٩٦	٠/٥٠٥٧	٠/٥٠٧٢	٠/٥٠٨٠
٤٠	٠/٥٢٢١	٠/٥١٩٩	٠/٥٢٠٨	٠/٥٢١٢
٥٠	٠/٥١٠٤	٠/٥٠٨٢	٠/٥٠٩١	٠/٥٠٩٥
٧٠	٠/٥١٢٢	٠/٥١٠٧	٠/٥١١٣	٠/٥١١٦
١٠٠	٠/٤٩٦٤	٠/٤٩٥٠	٠/٤٩٥٦	٠/٤٩٥٨

	$\theta=١/٥$			
m	$\hat{P}_{n+۱}^{\pi}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۱}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۲}^{CGM}$	$\hat{P}_{n+۱,\Gamma_۲}^{CGM}$
٥	٠/٥٧٠٣	٠/٥٥٧٥	٠/٥٥٩٩	٠/٥٦٣٣
١٠	٠/٥٤٤٥	٠/٥٣٥٦	٠/٥٣٨١	٠/٥٤٠٢
٢٠	٠/٥١٩٩	٠/٥١٤٤	٠/٥١٦١	٠/٥١٧٣
٣٠	٠/٥٢٩٥	٠/٥٢٦٣	٠/٥٢٧٣	٠/٥٢٨٠
٤٠	٠/٥١٧٨	٠/٥١٥٩	٠/٥١٦٧	٠/٥١٧٣
٥٠	٠/٥١٧٨	٠/٥١٥٩	٠/٥١٦٦	٠/٥١٧٠
٧٠	٠/٥٠٣٨	٠/٥٠١٩	٠/٥٠٢٥	٠/٥٠٢٩
١٠٠	٠/٤٩٧٧	٠/٤٩٦٤	٠/٤٩٦٨	٠/٤٩٧١

برآورد بیزی حق بیمه تحت پیشین آمیخته

توزیع‌های پیشین در نظر گرفته شده در بخش‌های قبل، خانوادهٔ کوچکی از توزیع‌های پیشین را در نظر می‌گرفتند. در این بخش خانواده توزیع‌های کلی‌تر آمیخته که سیواگنسن و برگر [۲۵] پیشنهاد کرده‌اند و گومز-دنیز و همکاران [۱۶] در برآورد حق بیمه بیزی استفاده کرده‌اند، مورد نظر قرار می‌دهیم. این خانواده از توزیع‌ها بدین‌صورت هستند:

$$\Gamma_\varepsilon = \{\pi(\theta) = (1-\varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon q(\theta) \mid q \in Q\} \qquad (۲۱)$$

که $\pi_0(\theta)$ یک توزیع پیشین ثابت (مانند توزیع گامای وارونه (۸))، $\varepsilon \in [0,1]$ مقدار خطای مربوط به $\pi_0(\theta)$ و Q خانواده‌ای کلی از توزیع پیشین است. برای Q دو خانواده از توزیع‌های پیشین Q_1 و Q_2 را در نظر می‌گیریم که Q_1 کلاس همهٔ توزیع‌های پیشین و Q_2 کلاس توزیع‌های پیشین تک مدی است و به‌همین ترتیب کلاس توزیع‌های پیشین در (۲۱) برای Q_1 و Q_2 را به‌ترتیب با Γ_ε^1 و Γ_ε^2 نشان می‌دهیم.

با توجه به رابطهٔ (۷) داریم:

$$P^\pi(\mathbf{x}^n) = \frac{E[\frac{1}{P(\theta)} \mid \mathbf{x}^n]}{E[\frac{1}{P^2(\theta)} \mid \mathbf{x}^n]} = \frac{E[\frac{1}{u\theta} \mid \mathbf{x}^n]}{E[\frac{1}{(u\theta)^2} \mid \mathbf{x}^n]} = u\,\frac{\int_\theta g_1(\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_\theta g_2(\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

که در آن $g_1(\theta) = \frac{1}{\theta}$ و $g_2(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. با توجه به گومز-دنیز و همکاران [۱۶] برآورد بیزی حق بیمه تحت کلاس توزیع‌های پیشین Γ_ε بدین‌صورت است:

$$P^\pi(\mathbf{x}^n) = \frac{R_1 P^{\pi_0}(\mathbf{x}^n) + \int_0^\infty R_2(\theta)\pi(\theta)d\theta}{R_1 + \int_0^\infty R_3(\theta)\pi(\theta)d\theta} \qquad (۲۱)$$

که در آن

$$R_1 = (1-\varepsilon)\frac{\Gamma(a_0+2)\prod_{i=1}^n x_i^{\nu-1}\beta_0^{\alpha_0}}{(\Gamma(\nu))^n\Gamma(\alpha_0)b_0^{a_0+2}},$$

$$R_2(\theta) = \varepsilon\frac{\prod_{i=1}^n x_i e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}}}{(\Gamma(\nu))^n\theta^{n\nu+1}}, \qquad R_3(\theta) = \frac{1}{\theta}R_2(\theta).$$

و $P^{\pi_0}(\mathbf{x}^n)$ حق بیمه بیزی تحت توزیع پیشین گامای وارونهٔ (۸) است. با توجه به اینکه محاسبهٔ برآوردگر بیزی استوار تحت توزیع‌های پیشین Γ_ε بسیار دشوار است، به‌همین سبب، مانند گومز-دنیز و همکاران [۱۶]

به محاسبهٔ برآورد حق بیمه بیزی و دامنه برآورد حق بیمه بیزی زمانی که $\pi_{\cdot}(\theta)$ توزیع پیشین گامای وارونهٔ (۸) است، می‌پردازیم و سپس حساسیت آن را تحلیل می‌کنیم. حساسیت حق بیمه بیزی با استفاده از معیار حساسیت نسبی $(R.S.)$ معرفی شده به‌وسیلهٔ سیواگنسن [۲۶] بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$R.S.^{i}=\frac{۱}{P^{\pi_{\cdot}}(\mathbf{x}^{n})}\left[\sup_{\pi\in\Gamma_{\varepsilon}^{i}}P^{\pi}(\mathbf{x}^{n})-\inf_{\pi\in\Gamma_{\varepsilon}^{i}}P^{\pi}(\mathbf{x}^{n})\right]\times ۱۰۰,\quad i=۱,۲$$

که درصد تغییرات $P^{\pi}(\mathbf{x}^{n})$ نسبت به $P^{\pi_{\cdot}}(\mathbf{x}^{n})$ وقتی که $\pi(\theta)$ روی کلاس‌های پیشین Γ_{ε}^{i}، $i=۱,۲$، تغییر می‌کند، را بیان می‌کند.

با توجه به رابطهٔ (۲۱) و با پیروی از کار گومز- دنیز و همکاران [۱۶] در کلاس $\Gamma_{\varepsilon}^{۱}$ داریم:

$$\sup_{\pi\in\Gamma_{\varepsilon}^{۱}}P^{\pi}(\mathbf{x}^{n})=\sup_{\theta\geq\cdot}\frac{R_{۱}P^{\pi_{\cdot}}(\mathbf{x}^{n})+R_{۲}(\theta)}{R_{۱}+R_{۳}(\theta)},$$

$$\inf_{\pi\in\Gamma_{\varepsilon}^{۱}}P^{\pi}(\mathbf{x}^{n})=\inf_{\theta\geq\cdot}\frac{R_{۱}P^{\pi_{\cdot}}(\mathbf{x}^{n})+R_{۲}(\theta)}{R_{۱}+R_{۳}(\theta)}.$$

همچنین در کلاس $\Gamma_{\varepsilon}^{۲}$ داریم:

$$\sup_{\pi\in\Gamma_{\varepsilon}^{۲}}P^{\pi}(\mathbf{x}^{n})=\sup_{z\geq\cdot}\frac{R_{۱}P^{\pi_{\cdot}}(\mathbf{x}^{n})+H_{۲}(z)}{R_{۱}+H_{۳}(z)},$$

$$\inf_{\pi\in\Gamma_{\varepsilon}^{۲}}P^{\pi}(\mathbf{x}^{n})=\inf_{z\geq\cdot}\frac{R_{۱}P^{\pi_{\cdot}}(\mathbf{x}^{n})+H_{۲}(z)}{R_{۱}+H_{۳}(z)},$$

که در آن

$$H_{i}(z)=\begin{cases}\frac{۱}{z}\int_{\theta_{\cdot}}^{\theta_{\cdot}+z}R_{i}(\theta)d\theta & z>\cdot\\ R_{i}(\theta_{\cdot}) & z=\cdot\end{cases}\qquad i=۲,۳.$$

و $\theta_{\cdot}$ مد توزیع پیشین است. در ادامه، با شبیه‌سازی به مقایسهٔ حساسیت نسبی حق بیمهٔ بیزی در دو کلاس ارائه شده می‌پردازیم.

جدول ۲ دو سری دادهٔ شبیه‌سازی شده مربوط به مقدار خسارت طی ۱۰ دوره $(n=۱۰)$ از توزیع گاما با پارامترهای $\nu=۳$ و $\theta=۴$ را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم که توزیع پیشین $\pi_{\cdot}(\theta)$ توزیع گامای وارونه $IGamma(۲,۱)$ دارد. جدول ۳ مقادیر حق بیمهٔ بیزی، اینفیمم، سوپرمم و حساسیت نسبی را به ازای مقادیر مختلف ε در دو کلاس $\Gamma_{\varepsilon}^{۱}$ و $\Gamma_{\varepsilon}^{۲}$ با $\theta_{\cdot}=۲$ نشان می‌دهد. در واقع حساسیت نسبی در هر یک از حالت‌های در نظر گرفته شده خیلی بزرگ نیست و مقدار آن با افزایش ε، افزایش می‌یابد. چون $\Gamma_{\varepsilon}^{۲}\subset\Gamma_{\varepsilon}^{۱}$، بنا بر این $R.S.^{۲}<R.S.^{۱}$، یعنی حساسیت نسبی در کلاس $\Gamma_{\varepsilon}^{۱}$ بیش‌تر از کلاس $\Gamma_{\varepsilon}^{۲}$ است. به‌عبارت دیگر کلاس همهٔ توزیع‌های پیشین $\Gamma_{\varepsilon}^{۱}$ شامل توزیع‌های پیشین نامعقول زیادی است و کلاس توزیع‌های پیشین تک مدی $\Gamma_{\varepsilon}^{۲}$ برای مدل‌بندی حق بیمه بیزی مناسب‌تر است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، برآورد بیزی و بیزی استوار حق بیمه را که تابعی خطی از پارامتر مقیاس جامعهٔ گاما است تحت تابع زیان توان دوم خطای ناوردای مقیاس به‌دست آورده و پیش‌گویی بیزی و بیزی استوار مقدار خسارت آینده را محاسبه کردیم. ابتدا دو کلاس از توزیع‌های پیشین را برای پارامتر مقیاس در نظر گرفتیم و در یک کلاس، برآوردگرها و پیش‌گوهای گاما مینیماکس شرطی، پایدارترین، تأسف پسین گاما مینیماکس و حداقل حساسیت و در کلاس دیگر، برآوردگرها و پیش‌گوهای گاما مینیماکس شرطی و پایدارترین را به‌دست آوردیم. پیش‌گوهای بیزی و بیزی استوار مقدار خسارت را به‌کمک روش پیش‌گویی دنباله‌ای مقایسه کردیم. مشاهده شد که استفاده از پیش‌گوهای بیزی استوار مشاهدات آینده و مقدار خسارت آینده، موجب خطای پیش‌گویی کم‌تری نسبت به پیش‌گوی بیزی عادی می‌شود. از همین رو، استفاده از پیش‌گوهای بیزی استوار توصیه می‌شود. هم‌چنین، برآورد بیزی حق بیمه را تحت کلاس توزیع‌های پیشین آمیخته محاسبه و با یک شبیه‌سازی، حساسیت نسبی این برآوردگرها را بررسی کردیم. مشاهده شد که با افزایش ε مقدار حساسیت نسبی نیز افزایش می‌یابد. هم‌چنین حساسیت نسبی حق بیمه بیزی در کلاس توزیع‌های پیشین تک مدی $\Gamma_\varepsilon^{۲}$ کم‌تر از $\Gamma_\varepsilon^{۱}$ است؛ یعنی برای مدل‌بندی حق بیمه بیزی بهتر است از کلاس توزیع‌های پیشین تک مدی $\Gamma_\varepsilon^{۲}$ استفاده کنیم.

جدول ۲. داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع گاما با پارامترهای $\nu = ۳$ و $\theta = ٤$

سری اول	۱۴/۶۸	۲۹/۰۳	۱۷/۹۷	۵/۸۲	۱۷/۵۰	۱۶/۵۱	۷/۲۸	۱۰/۹۱	۱۴/۵۸	۲/۸۸
سری دوم	۶/۸۰	۶/۰۶	۷/۱۵	۲/۰۲	۲۱/۳۴	۶/۴۹	۴/۵۳	۶/۲۶	۶/۶۸	۴/۵۱

جدول ۳. مقادیر حساسیت نسبی حق بیمه بیزی

		مقادیر ε		
		۰/۱	۰/۱۵	۰/۲
سری اول $P^{\pi_*}(\mathbf{x}^n) = ٤/۱۷۸$	$\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon^{۱}} P^{\pi}(\mathbf{x}^n)$	۳/۶۲۵	۳/۵۲۷	۳/۴۵۶
	$\sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon^{۱}} P^{\pi}(\mathbf{x}^n)$	۵/۱۵۹	۵/۳۴۹	۵/۴۹۷
	$RS^{۱}$	۱۸/۳۵	۲۱/۷۵۸	۲۴/۳۷
سری دوم $P^{\pi_*}(\mathbf{x}^n) = ۲/۲۰۷$	$\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon^{۲}} P^{\pi}(\mathbf{x}^n)$	۲/۰۲۰	۱/۹۷۱	۱/۹۳۳
	$\sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon^{۲}} P^{\pi}(\mathbf{x}^n)$	۲/۵۰۳	۲/۵۸۶	۲/۶۵۴
	$RS^{۲}$	۱۰/۹۴۲	۱۳/۹۳۳	۱۶/۳۳۴
سری اول $P^{\pi_*}(\mathbf{x}^n) = ٤/۱۷۸$	$\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon^{۱}} P^{\pi}(\mathbf{x}^n)$	۳/۳۰۷	۳/۲۹۷	۳/۲۸۸
	$\sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon^{۱}} P^{\pi}(\mathbf{x}^n)$	۴/۵۶۸۵	۴/۵۶۷۸	۴/۵۶۸۹
	$RS^{۱}$	۱۵/۰۶	۱۵/۲۱	۱۵/۲۹
سری دوم $P^{\pi_*}(\mathbf{x}^n) = ۲/۲۰۷$	$\inf_{\pi\in\Gamma_\varepsilon^{۲}} P^{\pi}(\mathbf{x}^n)$	۲/۱۰۸	۲/۱۰۶	۲/۱۰۴
	$\sup_{\pi\in\Gamma_\varepsilon^{۲}} P^{\pi}(\mathbf{x}^n)$	۲/۵۰۳	۲/۵۰۴	۲/۵۰۵
	$RS^{۲}$	۸/۹۴	۹/۰۱	۹/۰۸

منابع

1. H. Robbins, "Asymptotically sub-minimax solutions to compound statistical decision problem", In Proc. Second Berkeley symp, Math. Stat. Probab., 1, university of California Press, Berkeley (1951).
2. I. J. Good, "Rational decisions", Journal of the Royal Statistical Society, series B, 14 (1952) 107-114.
3. J. O. Berger, "The robust Bayesian viewpoint (with discussion)", In Robustness of Bayesian Analysis (J. Kadane ed.), North Holland, Amsterdam (1984).
4. A. Dasgupta, W. Studden, "Frequentist behavior of robust Bayes estimates of normal means", Statistics and Decisions, 7 (1989) 333-361.
5. B. Betro, F. Ruggeri, "Conditional Γ-minimax actions under convex losses", Commun. Statis. Theory Methods, 21 (1992) 1051-1066.
6. M. Meczarski, R. Zielinski, "Stability of the Bayesian estimator of the Poisson mean under the inexactly specified gamma prior", Statist. Probab. Lett., 12 (1991) 329-333.
7. A. Boratynska, M. Meczarski, "Robust Bayesian estimation in the one-dimensional normal model", Statist. Decisions, 12 (1994) 221-230.
8. M. Zen, A. Dasgupta, "Estimating a binomial parameter: Is robust Bayes real Bayes?", Statistics and Decisions, 11 (1993) 37-60.
9. D. Rios Insua, F. Ruggeri, B. Vidakovic, "Some results on posterior regret Γ- minimax estimation", Statist. Decision, 13 (1995) 315-331.
10. J. P. Arias-Nicolas, J. Martin, F. Ruggeri, A. Suarez-Llorens, "Optimal actions in problems with convex loss function", Int. J. Approx. Reason, 50 (2009) 303-314.
11. J. Eichenauer, J. Lehn, S. Rettig, "A gamma-minimax result in credibility theory", Insurance: Mathematics and Economics", 7 (1) (1988) 49-57.
12. W. Heilmann, "Decision theoretic foundations of credibility theory", Insurance: Mathematics and Economics, 8 (1989) 77-95.
13. E. Gomez-Deniez, "A generalization of the credibility theory obtained by using the weighted balanced loss function", Insurance: Mathematics and Economics, 42 (2008) 850-854.
14. S. Rios, J. Martin, D, Rios, F. Ruggeri, "Bayesian forecasting for accident proneness evaluation", Scandinavian Actuarial Journl, 2 (1999) 134-156.

15. E. Gomez-Deniez, A. Hernndez-Bastida, F. Vzquez-polo, "The Esscher premium principle in risk theory. a Bayesian sensitivity study", *Insurance: Mathematics and Economics*, 25 (1999) 387-395.

16. E. Gomez-Deniez, A. Hernndez-Bastida, F. J. Vazquez-polo, "Robust Bayesian premium principles in actuarial science", Journal of the Royal Statistical Society, *series D*, 49 (2000) 241-252.

17. E. Gomez-Deniez, J. M. Perez, A. Hernandez-Bastida, F. J. Vazquez-polo, "Measuring sensitivity in a bonus-malus system", *Insurance: Mathematics and Economics*, 31 (1) (2002) 105-113.

18. E. Gomez-Deniez, J. M. Perez, F. J. Vazquez-polo, "On the use of posterior regret Γ-minimax actions to obtain credibility premiums", Insurance: Mathematics and Economics, 39 (2006) 115-121.

19. E. Gomez-Deniez, "Some Bayesian credibility premiums obtained by using posterior regret Γ- minimax methodology", Bayesian Analysis, 4 (2) (2009) 223-242.

20. A. Boratynska, "Posterior regret gamma minimax estimation of insurance premium in collective risk model", Astin Bulletin, 38 (1) (2008) 277-291.

21. D. J. Spiegelhalter, K. R. Abrams, J. P. Myles, "Bayesian Approaches to Clinical Trials and Health-care Evaluation", John Wiley and Sons, England (2004).

22. A. Boratynska, " Robust Bayesian prediction with asymmetric loss function in Poisson model of insurance risk", Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica, 196 (2006) 123-138.

23. P. Dawid, "Statistical theory: the prequential approach (with discussion)", Journal of the Royal Statistical Society, series A, 147 (1984) 278-292.

24. A. P. Dawid, V. G. Vovk, "Prequential probability: principals and properties", Bernoulli, 5 (1) (1999) 125-162.

25. S. Sivaganesan, J. O. Berger, "Ranges of posterior measures for priors with unimodal contaminations", Ann Statist, 17 (1989) 868-889.

26. S. Sivaganesan, "Sensitivity of some posterior summaries when the prior is unimodal with specified quantiles", The Canadian Journal of Statistics, 19 (1991) 57-65.