نشریه علوم دانشگاه خوارزمی
جلد ۱۳، شماره ۳
تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۲

تعیین ساختار همبستگی داده‌های فضایی و فضایی-زمانی با توابع مفصل

مهدی امیدی، محسن محمدزاده*؛
دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم، گروه آمار

چکیده

توابع مفصل برای ساخت توزیع توأم متغیرهای وابسته بر اساس توزیع‌های کناری ابزارهایی قوی هستند. هر یك از این توابع مدلی ارائه می‌کنند که با آن تمام خصوصیات وابستگی متغیرها قابل بیان است. در تحلیل داده‌های فضایی لازم است بر اساس توزیع چندمتغیره میدان تصادفی ساختار همبستگی داده‌ها مشخص شود. برای داده‌های فضایی زمانی نیز لازم است ساختار ارتباط فضایی و زمانی در قالب تابع کوواریانس بیان شود. گاهی برای راحتی، از توابع کوواریانس فضایی-زمانی تفکیك‌پذیر استفاده می‌شود؛ اما این ویژگی در برخی موارد واقع‌گرایانه نیست و ضروری است به‌کارگیری توابع کوواریانس فضایی-زمانی تفکیك‌ناپذیر باشد. در این پژوهش، با توجه به ویژگی‌های همبستگی داده‌های فضایی نقش توابع مفصل در تعیین توزیع توأم میدان تصادفی بررسی و شرایط اعتبار تابع مفصل فضایی تعیین می‌شود سپس خانواده جدیدی از توابع مفصل فضایی معتبر معرفی خواهد شد. آن‌گاه با استفاده از این توابع مفصل به ساخت توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی تفکیك‌ناپذیر معتبر اقدام می‌شود.

مقدمه

پیش‌گویی مقدار میدان تصادفی در مکان‌های فاقد مشاهده در آمار فضایی، معمولاً با فرض گاوسی بودن میدان تصادفی انجام می‌شود. اما این فرض در برخی مسائل واقع‌گرایانه نیست و باید توزیع میدان تعیین شود. یکی از روش‌های تعیین توزیع توأم متغیرهای تصادفی استفاده از توابع مفصل[1] است. اسکلار [۱۹] این توابع را اولین بار معرفی کرد، جو [۱۱] و نلسن [۱۸] خانواده‌های متعدد این توابع را که در علوم مختلف به‌کار می‌رود جمع‌آوری کردند. امیدی و همکاران [۱] خانواده‌های مفصل مناسب برای مدل‌بندی خشك‌سالی در استان تهران را بررسی کردند. امیدی و محمدزاده [۲] با روی‌کرد بیز تجربی برآورد پارامتر تابع مفصل را به‌دست آوردند. باردوسی [۳] برای اولین بار از مفصل گاوسی و مفصل خی-دو غیرمرکزی در تحلیل داده‌های فضایی استفاده کرد. باردوسی و لای [۴] از مفصل V- تبدیل‌یافته نرمال چند متغیره برای پیش‌گویی خصوصیات مکانی آب‌های زیرزمینی استفاده کردند. گرایلر و پیسما [۱۰] با استفاده از ترکیب خطی از توابع مفصل، تابع مفصل فضایی معتبر ساخته و از آن در پیش‌گویی فلزات سنگین در رودخانه میوز استفاده کردند. تعیین توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی[2] مسئلهٔ مهم در تحلیل داده‌های همبستهٔ فضایی و زمانی است. کرسی و هوانگ [۵] از تابع

واژه‌های کلیدی: داده‌های فضایی، تابع مفصل فضایی، توابع کوواریانس فضایی زمانی.
دریافت ۹۲/۳/۲۲ پذیرش ۹۲/۹/۲۴
*نویسنده مسئول mohsen_m@modares.ac.ir

۱. Copula Function ۲. Spatio-temporal

طیفی برای ساخت توابع کوواریانس فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر استفاده کردند. این روش را گنیتینگ [۸] با استفاده از توابع کاملاً یکنوا و برنشتاین تعمیم دادند. ما در [۱۴] و [۱۶] بر اساس ترکیب‌های محدب از توابع کوواریانس معتبر و استفاده از تبدیل‌های لاپلاس ردهٔ جدیدی از توابع کوواریانس فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر را معرفی کرد. کنت و همکاران [۱۲] نشان دادند که مدل گنیتینگ [۸] برای برخی از توابع کاملاً یکنوا و برنشتاین دالای گودالی[۱] است که استفاده از آن‌ها را به‌گونه‌ای محدود می‌کند. در این پژوهش ابتدا نقش توابع مفصل در تعیین توزیع تحقق‌های میدانی تصادفی بررسی و یک تابع مفصل فضایی معتبر و جدید معرفی می‌شود، سپس با استفاده از توابع مفصل روش‌هایی برای ساخت توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی معتبر ارائه می‌شود.

توابع مفصل

برای دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y به‌ترتیب با توابع توزیع $F_X(x)$ و $G_Y(y)$ و تابع توزیع توأم $H(x,y)$، توابع مفصلی مانند $K(\cdot,\cdot)$ وجود دارند که برای هر x و y در $\bar{R}=R\cup(-\infty,\infty)$ داریم:

$$H(x,y)=K(F_X(x),G_Y(y))$$

اگر F_X و G_Y مطلقاً پیوسته باشند، تابع مفصل K یکتاست. اگر $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ توابع چگالی کناری X و Y باشند، آن‌گاه تابع چگالی توأم آن‌ها بدین‌صورت است:

$$f_{X,Y}(x,y)=k(F_X(x),G_Y(y))f_X(x)f_Y(y)$$

که در آن k تابع مفصل چگالی توأم است و از رابطهٔ $k(u,v)=\dfrac{\partial^2 K(u,v)}{\partial u\partial v}$ به‌دست می‌آید. برای هر تابع مفصل کران‌هایی بدین‌صورت وجود دارند:

$$W(u,v)=\max(u+v-۱,۰)\le K(u,v)\le \min(u,v)=M(u,v) \qquad (۱.۲)$$

که با $M(\cdot,\cdot)$ و $W(\cdot,\cdot)$ نشان داده می‌شوند و به‌ترتیب کران‌های بالا و پایین فرشه-هافدینگ نامیده می‌شوند [۱۱]. بنا بر (۱.۲) در مفصل کران بالا حداکثر هم‌آهنگی و در مفصل کران پایین حداکثر ناهم‌آهنگی وجود دارد. برای دو متغیر تصادفی مستقل تابع مفصل حاصل‌ضرب به‌صورت $\Pi(u,v)=uv$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۲. (نلسن [۱۸]) اگر $\varphi(t)$ تابعی پیوسته اکیداً نزولی از [۱،۰] به [۰،∞] با شرط φ(۱)=۰ و وارون $\varphi^{-1}(t)$ باشد، آن‌گاه

$$K(u,v)=\varphi^{-۱}(\varphi(u)+\varphi(v)) \qquad (۲.۲)$$

یك تابع مفصل است، اگر و فقط اگر $\varphi(t)$ محدب باشد.

۱. Dimple

مجموعهٔ توابع مفصل ساخته شده بر اساس رابطهٔ (۲.۲) خانوادهٔ ارشمیدسی است و $\varphi(t)$ تابع مولد مفصل ارشمیدسی نامیده می‌شود.

توابع مفصل فضایی

در آمار فضایی پیش‌گویی میدان تصادفی $Z=\{Z(s);\, s\in D\subset R^d\}$ در موقعیت مشخص $s_۰$ بر اساس تحقق‌های میدان تصادفی، یعنی $z=(z(s_۱),\ldots,z(s_n))$، در موقعیت‌ها انجام می‌شود. معمولاً این پیش‌گویی با فرض گاوسی بودن میدان تصادفی صورت می‌پذیرد. اما گاهی این فرض در عمل واقع‌گرایانه نیست و لازم است توزیع توأم $Z=(Z(s_۱),\ldots,Z(s_n))$ تعیین شود.

برای حالت دو متغیره، با معلوم بودن توزیع متغیرهای تصادفی $Z(s_۱)$ و $Z(s_۲)$ و با استفاده از تابعی مفصل مانند $K_h(\cdot,\cdot)$، که در آن $h=s_۱-s_۲$ است، توزیع توأم آن‌ها را می‌توان بدین‌صورت به‌دست آورد:

$$P(Z(s_۱)\le z_۱, Z(s_۲)\le z_۲)=K_h(F_Z(z_۱),F_Z(z_۲))$$

با توجه به خواص وابستگی داده‌های فضایی، تابع مفصل $K_h(\cdot,\cdot)$ در صورتی معتبر است که اولاً همواره وابستگی مثبت را نتیجه دهد؛ ثانیاً وقتی $\|h\|$ به بی‌نهایت میل کند، تابع مفصل حاصل‌ضرب و موقعی که به صفر میل کند، کران بالای فرشه هافدینگ را نتیجه دهد؛ یعنی

$$\lim_{\|h\|\to\infty}K_h(u,v)=uv\ ,\ \ \lim_{\|h\|\to ۰}K_h(u,v)=M(u,v)$$

اغلب توابع مفصل ارائه شده در منابع لزوماً واجد شرایط مفصل فضایی معتبر نیستند. بنا بر این در ادامه چند تابع مفصل فضایی معتبر معرفی می‌شوند.

مفصل گاوسی. تابع مفصل گاوسی بدین‌صورت است:

$$K_h(u_۱,\ldots,u_n)=\Phi_{۰,\Lambda_h}(\Phi^{-۱}(u_۱),\ldots,\Phi^{-۱}(u_n))$$

که در آن $\Phi^{-۱}(\cdot)$ وارون تابع توزیع نرمال استاندارد و $\Phi^{-۱}_{0,\Lambda_h}(\cdot)$ مفصل گاوسی با میانگین صفر و تابع کوواریانس Λ_h است. از آن‌جا که این مفصل برای هم‌بستگی صفر تابع مفصل استقلال و برای هم‌بستگی یك کران بالای فرشه-هافدینگ را نتیجه می‌دهد، تابعی مفصل فضایی معتبر است.

بر اساس تابع مفصل گاوسی و تبدیل‌هایی از توزیع نرمال چندمتغیره، می‌توان مفصل‌های فضایی معتبر ساخت، که در ادامه معرفی می‌شوند.

مفصل خی دو غیرمرکزی. باردوسی [۳] با استفاده از تبدیل $g(Y)=Y^۲$، که در آن Y دارای توزیع نرمال چندمتغیره است، مفصل خی دوی غیرمرکزی را با تابع مفصل چگالی بدین‌صورت به‌دست می‌اید:

$$k_h(u,v)=\frac{K_۲}{\sqrt{۴\pi xy}}\exp\{\frac{-۲\sqrt{xy}\rho_h+(x+y)\rho_h^۲}{2(\rho_h^۲-۱)}\}(۱+\exp\{\frac{۲\sqrt{xy}\rho_h}{\rho_h^۲-۱}\})$$

که برای هم‌بستگی صفر استقلال و برای هم‌بستگی یك کران بالای فرشه-هافدینگ را نتیجه می‌دهد.

توزیع V- تبدیل یافته تابع مفصل نرمال چندمتغیره. این مفصل را باردوسی و لای [۴] و با استفاده از تبدیل

$$X_j = g(Y_j) = \begin{cases} k(Y_j - ۱) & Y_j \geq m \\ m - Y_j & Y_j < m \end{cases}$$

معرفی کردند؛ به‌طوری‌که توزیع‌های یك و n-متغیره X به‌ترتیب به‌صورت

$$F_۱(x) = \Phi(\frac{k}{m} + ۱) - \Phi(-x - ۱)$$

$$\begin{aligned} F_n(x_۱, \ldots, x_n) &= \Phi_{۰,\Lambda_h}(\frac{k}{m} + ۱) - \Phi_{۰,\Lambda_h}(-x - ۱) \\ &= \sum_{i=۰}^{۲^n - ۱} (-۱)^i \Phi_{۰,\Lambda_h}(\xi_i + m) \end{aligned}$$

به‌دست می‌آیند، که در آن $\xi_i^T = \{b(-۱)^{i_۱} x_i, \ldots, b(-۱)^{i_n} x_n\}$ و

$$b(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ \frac{۱}{k} & x > ۰ \end{cases}$$

تابع مفصل فضایی معتبر متناظر با این تبدیل به‌صورت

$$K_h(u_۱, \ldots, u_n) == \sum_{i=۰}^{۲^n - ۱} (-۱)^i \Phi_{۰,\Lambda_h}(\xi_i + m)$$

به‌دست می‌آید، که در $\xi_i^T = \{b(-۱)^{i_۱} F_۱^{-۱}(u_۱), \ldots, b(-۱)^{i_n} F_n^{-۱}(u_n)\}$.

مفصل ترکیبی نوع ۱. گرایلر و پیسما [۱۰] بر اساس تأخیرهای فضایی[۱] $\{h_{s_۱}, \ldots, h_{s_\ell}\}$ و ترکیب خطی از توابع مفصل، یك تابع مفصل فضایی معتبر به‌صورت

$$\begin{cases} \lambda_1 M(u,v) + (۱ - \lambda_1) K_{۱,h}(u,v) & ۰ \leq h \leq h_{s_۱} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_i K_{i-۱,h}(u,v) + (۱ - \lambda_i) K_{i,h}(u,v) & h_{s_{i-۱}} \leq h \leq h_{s_i} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_\ell K_{\ell h}(u,v) + (۱ - \lambda_\ell) \Pi(u,v) & h_{s_{\ell-۱}} \leq h \leq h_{s_\ell} \end{cases} \qquad (۳.۳)$$

تعریف کردند، که در آن $\lambda_i = \frac{h_i - h}{h_i - h_{i-۱}}$ است.

مفصل ترکیبی نوع ۲: با ایده گرفتن از مفصل ترکیبی نوع ۱ که از میانگین حسابی موزون استفاده می‌شود.

۱. Spatial Lag

می‌توان مفصل فضایی جدیدی براساس میانگین هندسی موزون دو تابع مفصل ارائه کرد. اما میانگین هندسی دو تابع مفصل لزوما یك تابع مفصل نیست. بنا بر این در این‌جا خانواده‌های خاص از توابع مفصل برای ساخت یك تابع مفصل فضایی معتبر معرفی می‌شود.

تعریف ۱.۳. تابع مفصل $K(u,v)$ ماکسیمال تقسیم‌پذیر نامتناهی[۱] ($Max-id$) نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هرعدد حقیقی مثبت r، $K^r(u,v)$ نیز تابع مفصل باشد.

جو [۱۱] ویژگی‌های این توابع را بررسی کرد و کلین و همکاران [۱۳] نیز نشان دادند برخی از توابع مفصل از جمله خانواده‌های توابع مفصل کلایتون به‌ازای $\theta>0$، فرانك به‌ازای $\theta>0$ و علی-میخاییل-حق به‌ازای $\theta>0$، $Max-id$ هستند.

قضیه ۱.۳. اگر $K_i(u,v)$ برای $i=1,\ldots,\ell$ توابع مفصل $Max-id$، $M(u,v)$ کران بالای فرشه-هافدینگ، $\Pi(u,v)$ مفصل حاصل‌ضرب و $\{h_{s_1},\ldots,h_{s_\ell}\}$ تأخیرهای فضایی[۲] باشند،آن‌گاه برای $\lambda_i=\dfrac{h_i-h}{h_i-h_{i-1}}$ عبارت

$$\begin{cases} M^{\lambda_1}(u,v)K_{1,h}^{(1-\lambda_1)}(u,v) & 0\le h\le h_{s_1} \\ \vdots & \vdots \\ K_{i-1,h}^{\lambda_i}(u,v)K_{i,h}^{1-\lambda_i}(u,v) & h_{s_{i-1}}\le h\le h_{s_i} \\ \vdots & \vdots \\ K_{\ell h}^{\lambda_\ell}(u,v)\Pi^{(1-\lambda_\ell)}(u,v) & h_{s_{\ell-1}}\le h\le h_{s_\ell} \end{cases} \qquad (۳.۴)$$

تابعی مفصل فضایی معتبر است.

اثبات: برای بازهٔ اول در رابطهٔ (۳.۴) که فاصله‌های با اندازهٔ نزدیك به صفر را در بر می‌گیرد، تابع مفصل به‌گونه‌ای است که حداکثر همبستگی، یعنی کران بالای فرشه-هافدینگ را در بر گیرد. در بازهٔ آخر برای فاصله‌های نسبتاً بزرگ نیز تابع مفصل به‌سمت عدم همبستگی فضایی یعنی مفصل حاصل‌ضرب میل می‌کند. از آن‌جا که برای هر دو تابع مفصل $Max-id$ مانند $K_1(u,v)$ و $K_2(u,v)$ میانگین هندسی موزون آن‌ها، یعنی

$$K(u,v)=K_1^{\alpha}(u,v)K_2^{1-\alpha}(u,v) \quad \text{به‌ازای } 0\le\alpha\le 1$$

نیز یك تابع مفصل است (کلین و همکاران [۱۳])، شرایط برای سایر بازه‌های رابطهٔ (۳.۴) نیز برقرارند.

دو نوع تابع مفصل (۳.۳) و (۳.۴) ویژگی تابع مفصل فضایی معتبر را بر اساس فاصله‌ها حفظ می‌کنند، با این شرط که انتخاب خانواده مفصل مناسب در هر بازهٔ به‌گونه‌ای باشد که همواره همبستگی مثبت را نتیجه داده و با افزایش فاصله موقعیت‌ها همبستگی کاهش یابد؛ برای عنوان مثال تابع مفصل گامبل-بارنت که به‌ازای $\theta\in[0,1]$ به‌صورت $K(u,v)=uv\exp(-\theta\log u\log v)$ است، همواره همبستگی منفی را نتیجه می‌دهد و به‌عنوان تابع مفصل فضایی معتبر استفاده نمی‌شود.

۱. Maximal Infinitely Divisible ۲. Spatial lag

توابع مفصل و هم‌بستگی فضایی

مفصل‌ها ابزاری برای مدل‌بندی ساختار هم‌بستگی متغیرهای تصادفی وابسته هستند. بسیاری از خانواده‌های این توابع می‌توانند وابستگی کامل مثبت و منفی را برای داده‌های وابسته پوشش دهند. داده‌های فضایی وابسته مثبت هستند و ساختار هم‌بستگی آن‌ها با توابع کوواریانس همیشه مثبت بیان می‌شود. در این بخش نقش توابع مفصل در ساخت توابع کوواریانس فضایی معتبر بیان می‌شود.

تعریف ۱.۴. تابع پیوسته مثبت $\phi(t)$ به‌ازای $t \geq ۰$، تابعی کاملاً یکـنوا[۱] است، اگر مشتق‌های تمام مراتب آن وجود داشته و

$$(-۱)^n \phi^{(n)}(t) \geq ۰, \quad n = ۰, ۱, \ldots$$

طبق قضیهٔ برنشتاین (فلر [۷]) تابع مثبت $\phi(t)$ با شرط $\phi(۰) = ۱$ کاملاً یکـنواست اگر و تنها اگر تبدیل لاپلاسی از یك تابع کراندار نامنفی باشد، یعنی

$$\phi(t) = \int_۰^\infty e^{-\alpha t} dM(r), \; t > ۰$$

که در آن $M(۰)$ یك اندازهٔ کراندار نامنفی است.

تعریف ۲.۴. تابع پیوسته مثبت $\psi(t)$ به‌ازای $t \geq ۰$، یك تابع برنشتاین[۲] است، هرگاه مشتق اول آن یك تابع کاملاً یکـنوا باشد.

قضیهٔ ۱.۴. (میلر و سامکو [۱۷]) اگر $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ توابعی کاملاً یکـنوا و $\psi(t)$ تابعی برنشتاین باشد، آن‌گاه $\phi_۱(t) + \phi_۲(t)$، $\phi_۱(t)\phi_۲(t)$ و $\phi_۱(\psi(t))$ نیز کاملاً یکـنوا هستند.

قضیه ۲.۴. اگر $\psi_۱(t)$ و $\psi_۲(t)$ دو تابع برنشتاین باشند، آن‌گاه $\psi(t) = \psi_۲(\psi_۱(t))$ برنشتاین است.

اثبات: چون

$$\psi'(t) = \psi_۱'(t)\psi_۲'(\psi_۱(t))$$

بنا به فرض $\psi_۱(t)$ و $\psi_۲(t)$ برنشتاین هستند، بنا بر این طبق تعریف مشتق‌های $\psi_۱'(t)$ و $\psi_۲'(t)$ توابعی کاملاً یکـنوا است و بنا بر قضیه ۱.۴ تابع $\psi(t)$ برنشتاین است.

قضیه ۳.۴. (ما [۱۶]) فرض کنید $\phi(t)$ تابعی کاملاً یکـنوا روی $[۰,\infty)$ یا به‌طور معادل تبدیل لاپلاسی از یك تابع غیرنزولی کراندار باشد، در این صورت

$$C_s(h) = \phi(\|h\|^۲), \quad h \in R^d$$

یك تابع کوواریانس فضایی مانا در R^d، $d \geq 1$ است.

نتیجه ۱.۴. چون t^ρ به‌ازای $\rho \in [۱،۰]$ تابعی برنشتاین است، برای هر تبدیل لاپلاس $\phi(t)$، بنا بر قضیه ۱.۴ تابع $\phi(t^\rho)$ کاملاً یکـنوا و تبدیل لاپلاس است. بنا براین با فرض $\alpha = 2\rho$، آن‌گاه تابع $C_s(h) = \phi(\|h\|^\alpha)$ به‌ازای هر $\alpha \in [۲،۰]$ تابعی کوواریانس پیوسته فضایی مانای معتبر است.

---
۱. Completely Monotone	۲. Bernstein

نتیجه ۲.۴. چون وارون تابع مولد یك مفصل ارشمیدسی تابعی کاملاً یکـنوا است، می‌توان بر اساس آن توابع کوواریانس فضایی یا زمانی معتبر ساخت.

مثال ۱.۴. تابع مولد مفصل ارشمیدسی فرانک به‌ازای $\theta \in R-\{0\}$ به‌صورت $\phi(t)=-\ln\{\frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}\}$ و وارون آن به‌صورت $-\frac{1}{\theta}\ln\{(\exp(-\theta)-1)e^{-t}+1\}$ است.

حال بنا بر نتیجه ۱.۴ تابع $-\frac{1}{\theta}\ln\{(\exp(-\theta)-1)e^{-\|h\|^{\rho}}+1\}$ به‌ازای $\rho \in [0,2]$ یك کوواریانس فضایی معتبر است.

در جدول ۱ برخی از توابع مفصل خانواده ارشمیدسی به‌همراه تابع کوواریانس فضایی معتبر متناظر آن‌ها ارائه شده است.

جدول ۱. خانودهٔ توابع مفصل ارشمیدسی و تابع کوواریانس فضایی متناظر آن‌ها

تابع مفصل	تابع مولد	تابع کاملاً یکنوا	فضای پارامتر	تابع کوواریانس
جو	$-\ln(1-(1-t)^{\theta})$	$1-(1-e^{-t})^{\frac{1}{\theta}}$	$[1,\infty)$	$1-(1-e^{-\|h\|^{\rho}})^{\frac{1}{\theta}}$
علی-میخاییل-حق	$\ln\frac{1-\theta(1-t)}{t}$	$\frac{1-\theta}{\exp(t)-\theta}$	$[-1,1)$	$\frac{1-\theta}{\exp(\|h\|^{\rho})-\theta}$
گامبل-بارنت	$\ln(1-\theta\ln t)$	$\exp\{\frac{1-e^{t}}{\theta}\}$	$[0,1)$	$\exp\{\frac{1-e\|h\|^{\rho}}{\theta}\}$
گامبل-هوگارد	$(-\ln t)^{\theta}$	$\exp\{-t^{\frac{1}{\theta}}\}$	$[1,\infty)$	$\exp\{-t^{\rho}\}$

مثال ۲.۴. دو تابع مولد مفصل ارشمیدسی $\phi_1(t)=(1-t)^{\theta}$ و $\phi_2(t)=\frac{1-t}{1+(\theta-1)t}$ (نلسن [۱۸]) به‌ازای $\theta \in [1,\infty)$ با وارون‌های $\phi_1^{-1}(t)=1-t^{\frac{1}{\theta}}$ و $\phi_2^{-1}(t)=\frac{t-1}{(\theta-1)t-1}$ هستند. با وجود این‌که این توابع کاملاً یکـنوا هستند اما تابع $\phi_1^{-1}(t)=1-\|h\|^{\frac{1}{\theta}}$ و $\phi_2^{-1}(t)=\frac{\|h\|-1}{(\theta-1)\|h\|-1}$ برای بعضی از مقادیر $\|h\|$ منفی هستند، که مغایر با همبستگی مثبت داده‌های فضایی است.

مثال ۲.۴ بیان‌گر آن است که نتیجه ۲.۴ لزوماً برای همهٔ توابع مفصل برقرار نیست.

ساخت تابع کوواریانس فضایی-زمانی

داده‌های فضایی که در طول زمان وابسته باشند، داده‌های فضایی‌زمانی نامیده می‌شوند و با میدان تصادفی $\{Z(s,t);(s,t)\in D\times T\}$ مدل‌بندی می‌شوند، که در آن $D\subset R^{d}$ ، $T\subset R$ ، s موقعیت فضایی و t موقعیت زمانی مشاهده را نشان می‌دهند. تابع کوواریانس فضایی-زمانی میدان تصادفی مانای مرتبهٔ دوم به‌صورت

$$C(h_s,h_t)=Cov(Z(s,t),Z(s+h_s,t+h_t)) \quad ;(s,t)\in D\times T$$

تعریف می‌شود، که در آن h_s و h_t به‌ترتیب تاخیرهای فضایی و زمانی هستند.

ما [۱۵] نشان داد اگر $C_s(h_s)$ و $C_t(h_t)$ به‌ترتیب دو تابع کوواریانس فضایی و زمانی در فضای R^d و R باشند آن‌گاه توابع

$$C_{s,t}(h_s,h_t)=\int C_s(uh_s)C_t(vh_t)dW(u,v) \qquad (۶.۵)$$

$$C_{s,t}(h_s,h_t)=\int [C_s(h_s)]^u[C_t(h_t)]^v dW(u,v) \qquad (۷.۵)$$

کوواریانس‌های فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر معتبر هستند، که در آن‌ها $W(u,v)$ اندازهٔ غیرمنفی و کراندار در $R^d\times R$ است.

چون توابع مفصل فضایی کراندار و مثبت هستند، با جای‌گذاری هر تابع مفصل $K(u,v)$ به‌جای $W(u,v)$ در روابط (۶.۵) و (۷.۵) توابع کوواریانس فضایی-زمانی معتبر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۵. با جای‌گذاری توابع مفصل

$$K(u,v)=pW+(۱-p-q)\Pi+qM$$
$$K(u,v)=Max\{\theta\Pi+(۱-\theta)W,۰\}$$

در روابط (۶.۵) و (۷.۵)، به‌دلیل این‌که $dK(u,v)=\alpha dudv$، و در آن α مقداری مثبت است، توابع کوواریانس به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع کوواریانس فضایی و زمانی به‌دست می‌آید.

جو [۱۱] برای چند خانواده از تبدیلات لاپلاس نشان داد که اگر $\phi_{\theta_۱}(t)$ تابعی کاملاً یکنوا باشد، آن‌گاه $\phi_{\theta_۲}^{-۱}(\phi_{\theta_۱}(t))$ برای $\theta_۱\geq\theta_۲$ متعلق به کلاس توابع برنشتاین ζ_∞^* است، که برای هر $w\in\zeta_\infty^*$ روابط $w(۰)=۰$ و $w(\infty)=\infty$ برقرار هستند.

نتیجه ۲.۵. اگر $\varphi_\theta(t)$ تابع مولد مفصل ارشمیدسی باشد، آن‌گاه وارون آن $\phi_\theta(t)$ تابعی کاملاً یکنوا است و $\varphi_{\theta_۲}(\phi_{\theta_۱}(t))$ یا به‌طور معادل $\phi_{\theta_۲}^{-۱}(\phi_{\theta_۱}(t))$ تابعی برنشتاین در کلاس ζ_∞^* است.

گنیتینگ [۸] نشان داد اگر $\phi(t)$ تابعی کاملاً یکنوا و $\psi(t)$ تابعی برنشتاین با شرایط$\psi(۰)=۱$ و $\psi(\infty)=\infty$ باشد، آن‌گاه

$$C_{s,t}(h_s,h_t)=\frac{۱}{\psi(h_t^۲)^{\frac{d}{۲}}}\phi\left(\frac{\|h_s\|^۲}{\psi(h_t^۲)}\right)$$

تابع کوواریانس فضایی زمانی مانا در $R^d\times R$ است.

نتیجه ۳.۵. با توجه به نتیجه ۲.۵ از تابع مولد مفصل ارشمیدسی می‌توان توابع کاملاً یکنوا و برنشتاین ساخت. چون تابع برنشتاین در کلاس توابع کوواریانس گنیتینگ باید در شرط $\psi(۰)=۱$ صدق کند، برای صدق کردن کلاس توابع ζ_∞^* در تابع کوواریانس گنیتینگ کافی است مقدار توابع این کلاس در نقطه صفر با عدد یك جمع شود. بر این اساس با توجه به تابع مولد مفصل ارشمیدسی تابع برنشتاینی که در تابع کوواریانس گنیتینگ صدق کند به ازای $\theta_۱\geq\theta_۲$ به‌صورت $\phi_{\theta_۲}^{-۱}(\phi_{\theta_۱}(t))+۱$ به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال برای تابع مفصل کلایتون تابع

کاملاً یکنوای $\phi_{\theta_1}(t)=(1+t)^{-\frac{1}{\theta_1}}$ و تابع برنشتاین $\phi_{\theta_2}^{-1}(\phi_{\theta_1}(t))+1=1+t^{\rho}$ به‌دست می‌آید، که در آن $\rho=\frac{\theta_2}{\theta_1}$.

گنیتینگ [۹] نشان داد اگر $C_s^r(h_s)$ و $C_t^r(h_t)$ به‌ترتیب توابع کوواریانس مانای فضایی و زمانی در R^d و R باشند، آن‌گاه برای اندازه متناهی و نامنفی $\mu(\cdot)$ عبارت

$$C_{s,t}(h_s,h_t)=\int C_s^r(h_s)C_t^r(h_t)d\mu(r) \qquad (۹.۵)$$

يك تابع کوواریانس فضایی-زمانی مانا در $R^d\times R$ است.

قضیه ۱.۵. اگر φ، φ_1 و φ_2 توابع مولد مفصل ارشمیدسی باشند، آن‌گاه تابع

$$C_{s,t}(h_s,h_t)=\varphi_\theta^{-1}(\varphi_{1\theta_2}(\varphi_{1\theta_1}^{-1}(a\|h\|^\alpha))+\varphi_{2\theta_4}(\varphi_{2\theta_3}^{-1}(b|h|^\beta))) \qquad (۱۰.۵)$$

به‌ازای $\alpha\in(0,2]$، $\beta\in[0,2]$، $\theta_1\ge\theta_2$، $\theta_3\ge\theta_4$ و a و b مثبت يك تابع کوواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در $R^d\times R$ است.

اثبات: چون $\exp(-t)$ کاملاً یک‌نوا است و $\varphi_{1\theta_2}(\varphi_{1\theta_1}^{-1}(at^{\rho_1}))$ و $\varphi_{2\theta_4}(\varphi_{2\theta_3}^{-1}(bt^{\rho_2}))$ به‌ازای $\rho_1\in(0,1]$، $\rho_2\in(0,1]$ و a و b مثبت برنشتاین هستند، از همین رو، بنا به نتیجه ۱.۴ به‌ازای $\alpha=2\rho_1$ و $\beta=2\rho_2$ تابع $\exp(-\varphi_{1\theta_2}(\varphi_{1\theta_1}^{-1}(a\|h\|^\alpha)))$ کوواریانس فضایی و تابع $\exp(-\varphi_{2\theta_4}(\varphi_{2\theta_3}^{-1}(b|h|^\beta)))$ کوواریانس زمانی معتبر هستند. با جای‌گذاری این روابط به‌جای $C_s(h_s)$ و $C_t(h_t)$ در (۹.۵) داریم

$$\int e^{-r(\varphi_{1\theta_2}(\varphi_{1\theta_1}^{-1}(a\|h\|^\alpha))+\varphi_{2\theta_4}(\varphi_{2\theta_3}^{-1}(b|h|^\beta)))}d\mu(r)=\varphi_\theta^{-1}(\varphi_{1\theta_2}(\varphi_{1\theta_1}^{-1}(a\|h\|^\alpha))+\varphi_{2\theta_4}(\varphi_{2\theta_3}^{-1}(b|h|^\beta)))$$

که نشان می‌دهد (۱۰.۵) تابعی کوواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در $R^d\times R$ است.

مثال ۱.۵. اگر φ، φ_1 و φ_2 از مفصل کلایتون انتخاب شوند، آن‌گاه تابع

$$C_{s,t}(h_s,h_t)=[(1+a\|h\|^\alpha)^{r_2}+(1+b|h_t|^\beta)^{r_3}-1]^{-\frac{1}{\theta_1}} \qquad (۱۱.۵)$$

به‌ازای $0\le r_2=\frac{\theta_2}{\theta_1}\le 1$، $0\le r_3=\frac{\theta_3}{\theta_1}\le 1$، $\alpha\in(0,2]$، $\beta\in[0,2]$، $\theta_1\ge 0$ و a و b مثبت تابعی کوواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در $R^d\times R$ است.

لازم به ذکر است که با فرض $r_2=r_3=1$، رابطهٔ (۱۱.۵) تابع کوواریانس فضایی-زمانی دیاکو و همکاران [۶] را نتیجه می‌دهد.

مثال ۲.۵. اگر φ، φ_1 و φ_2 از مفصل گامبل-هوگارد انتخاب شوند، آن‌گاه تابع

$$C_{s,t}(h_s,h_t)=\exp\{-[a\|h\|^\alpha+b|h_t|^\beta]^{-\frac{1}{\theta_1}}\}$$

به‌ازای $\alpha\in(0,2]$، $\beta\in[0,2]$، $\theta_1\ge 1$ و a و b مثبت يك تابع کوواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در $R^d\times R$ است.

مثال ۳.۵. اگر φ از مفصل کلایتون و φ_1 و φ_2 از مفصل گامبل-هوگارد انتخاب شوند، آن‌گاه

$$C_{s,t}(h_s,h_t)=\exp\{-[(1+a\|h\|^{\alpha})^{r_2}+(1+b|h_t|^{\beta})^{r_3}-2]^{-\frac{1}{\theta_1}}\}$$

به‌ازای $0\le r_2\le 1$، $0\le r_3\le 1$، $\alpha\in(0,2]$، $\beta\in[0,2]$، $\theta_1\ge 1$ و a و b مثبت یك تابع کوواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در $R^d\times R$ است. در جدول ۲ توابع کوواریانس فضایی-زمانی معتبر برای این دو خانواده ارائه شده‌اند، که در آن‌ها $0\le r\le 1$، $\alpha\in(0,2]$، $\beta\in[0,2]$ و a و b مثبت هستند.

جدول ۲. خانواده توابع مفصل و تابع کواریانس فضایی-زمانی متناظر آن‌ها

تابع مولد ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	فضای پارامتر	تابع کواریانس فضایی-زمانی
کلایتون	گامبل-هوگارد	گامبل-هوگارد	$[0,\infty)$	$[a\|h_s\|^{a}+b\|h_t\|^{\beta}]^{-\frac{1}{\theta}}$
کلایتون	کلایتون	گامبل-هوگارد	$[0,\infty)$	$\{[1+a\|h_s\|^{a}]^{r}+b\|h_t\|^{\beta}\}^{-\frac{1}{\theta}}$
گامبل-هوگارد	کلایتون	گامبل-هوگارد	$[1,\infty)$	$\exp\{-[a\|h_s\|^{a}+(1+b\|h_t\|^{\beta})^{r}+1]^{\frac{1}{\theta}}\}$

بحث و نتیجه‌گیری

توابع مفصل ابزاری مناسب برای مدل‌بندی توزیع توأم متغیرهای تصادفی هستند. گستردگی و انعطاف‌پذیری این توابع امکان ساخت توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی تفکیك‌ناپذیر را فراهم می‌سازد. در این مقاله یك تابع مفصل فضایی جدید معرفی و بر اساس ساختار توابع مفصل اقدام به ساخت توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی تفکیك‌ناپذیر شد و در ادامه معتبر بودن آن‌ها نیز از لحاظ نظری بررسی شد. هر چند که بررسی معتبر بودن توابع معرفی شده در این مقاله با توجه به ساختار توابع مفصل از لحاظ نظری امکان‌پذیر است اما بررسی معتبر بودن توابع مفصل فضایی، کوواریانس فضایی و کوواریانس فضایی-زمانی تفکیك‌ناپذیر ممکن است فقط برای توابع مفصل خاص میسر باشد.

قدردانی و تشکر

نویسندگان از داوران محترم مجله که نظرات ارزنده آن‌ها موجب بهبود مقاله شد و نیز از حمایت قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد، قدردانی می‌کنند.

منابع

۱. م. امیدی، م. محمدزاده، س. مرید، *تحلیل احتمالاتی مدت-شدت خشکسالی در استان تهران با استفاده از توابع مفصل*، مجلهٔ تحقیقات آب و خاك ایران، (۴۱) (۱۳۸۸)۱۰۱-۹۵.

۲. م. امیدی، م. محمدزاده، *مدل‌بندی درست‌نمایی و بیز تجربی تابع مفصل برای مدل‌بندی خشکسالی*، نشریه علوم دانشگاه تربیت معلم، (۱۰) (۱۳۹۰) ۶۵۴-۶۴۳.

3. A.Bardossy, "Copula-based Geostatistical Models for Groundwater Quality Parameters", Water Resources Research 42 (2006) W11416.

4. A. Bardossy, J. Li, "Geostatistical Interpolation Using Copulas", Water Resources Research, 44 (2008) W07412.

5. N. Cressie, H. C. Huang, "Classes of Non-Separable", Spatio-Temporal Stationary Covariance Functions, Journal of the American Statistical Association, 96 (1999) 1330-1340.

6. S. De Iaco, D. E. Myers, D. Posa, "Nonseparable space-time Covariance Models: some Parametric Families", Mathematical Geology, 34 (2002) 23-42.

7. W. Feller, "An Introduction to Probability Theory and Its Applications", 2, John Wiley, (1966) New York.

8. T. Gneiting, "Nonseparable, Stationary Covariance Functions for Space-Time Data", Journal of the American Statistical Association, 97 (2002) 590-600.

9. T. Gneiting, M. G. Genton, P. Guttorp, "Geostatistical Space-time Models, Stationarity, Separability and Full Symmetry", In Finken-stadt, B., Held, L. and Isham, V. (eds.), Statistical Methods for Spatio-Temporal Systems, Chapman and Hall (2007) 151-175.

10. B. Graler, E. Pebesma, "The Pair Copula Construction for Spatial Data, a New Approach to Model Spatial Dependency", Procedia Environmental Sciences, 7 (2011) 206-211.

11. H. Joe, "Multivariate Models and Dependence Concepts", Chapman and Hall (1997).

12. J. Kent, M. Mohammadzadeh, A. Mosammam, "The Dimple in Gneiting's Spatio Temporal Covariance Model", Biometrika, 98 (2011) 489-494.

13. I. Klein, F. Matthias, P. Thomas, "Weighted Power Mean Copulas: Theory and application", IWQW Discussion Paper Series 01/2011, Friedrich-Alexander-Universitat Erlangen-Nurnberg, Institut fur Wirtschaftspolitik und Quantitative Wirtschaftsforschung (IWQW) (2011).

14. C. Ma, "Spatio-Temporal Covariance Functions Generated by Mixtures", Mathematical Geology, 34 (2002) 965-974.

15. C. Ma, "Spatio-Temporal Stationary Covariance Models", Journal of Multivariate Analysis 86 (2003) 97-107.

16. C. Ma, "Spatio-Temporal Variograms and Covariance Models", Advances in Applied Probability, 37 (2005) 706-725.

17. S. Miller, G. Samko, "Completely Monotonic Functions", Integral Transformation and Special Function, 12 (2001) 389-402.

18. R. B. Nelsen, "An Introduction to Copulas, Lecture Notes in Statistics", New York, Springer (2006).

19. A. Sklar, "Fonctions de Repartition an Dimensions et Leurs Marges", Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris, 8 (1959) 229-231.