مقایسهٔ دو روش برای حل یک مسئلهٔ معکوس سهموی با پارامتر کنترلی

سهیلا بداغی و *علی‌مردان شاه‌رضایی:
دانشگاه الزهرا (س)، دانشکده علوم پایه

چکیده

در این مقاله با ارائهٔ دو روش به حل عددی یک مسئلهٔ معکوس سهموی با پارامتر کنترلی می‌پردازیم. در روش اول ابتدا به کمک تبدیلات معکوس‌پذیر، مسئلهٔ سهموی مورد نظر را استاندارد کرده و سپس به‌وسیلهٔ روش تفاضلات متناهی ضمنی به حل مسئلهٔ استاندارد حاصل اقدام می‌کنیم. در روش دوم با به‌کارگیری شرط کرانه‌ای فوق اضافی انتگرالی، پارامتر کنترلی را از مسئله حذف کرده و در نهایت مسئلهٔ تبدیل یافته را حل می‌کنیم. در پایان با ارائهٔ چند مثال به مقایسهٔ این دو روش می‌پردازیم.

مقدمه

مسئلهٔ سهموی ناهمگن:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + p(t)u(x,t) + f(x,t); & 0<x<1, \quad 0<t\le T, \quad (١)\\ u(x,0)=\varphi(x); & 0<x<1, \quad (٢)\\ u_x(0,t) = g_1(t); & 0<t\le T, \quad (٣)\\ Bu(1,t) = g_2(t); & 0<t\le T, \quad (٤)\end{cases}$$

با شرط کرانه‌ای فوق اضافی :

$$\int_0^{s(t)} u(x,t)\,dx = E(t); \qquad 0<s(t)\le 1, \qquad 0\le t\le T, \qquad (٥)$$

که در آن توابع f، φ، g_1، g_2، E>0 و s معلوم و توابع u و p مجهول و T عدد مثبت و معین و همچنین B عمل‌گر مشتق یعنی $B=\frac{\partial^n}{\partial x^n}; n=0,1$ است، را در نظر می‌گیریم. پدیده‌های فیزیکی بسیاری به‌وسیلهٔ مسئلهٔ (١) تا (٥) مدل‌بندی می‌شوند. به‌عنوان مثال اگر $u(x,t)$ معرف توزیع دما باشد، مسئلهٔ (١) تا (٥) را می‌توان به‌عنوان یک مسئلهٔ کنترلی با پارامتر کنترلی p(t) در نظر گرفت [١]. مسئلهٔ فوق یک مسئلهٔ معکوس است.

برای شرط کرانه‌ای (٤)، دو حالت وجود دارد. در حالت اول شرط کرانه‌ای به‌صورت $u(1,t)=g_2(t)$ و در حالت دوم به‌شکل $u_x(1,t)=g_2(t)$ است. در ادامه به حل عددی هر دو حالت مسئلهٔ مذکور می‌پردازیم. قضایای وجود و یکتایی جواب برای مسئلهٔ (١) تا (٥) به راحتی از مرجع [٢] یافت می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مسئلهٔ معکوس سهموی، پارامتر کنترلی، شرط فوق اضافی انتگرالی، روش تفاضلات متناهی ضمنی، مسئلهٔ تبدیل یافته، روش مستقیم.
دریافت ۸۹/۰۵/۲۶ پذیرش ۹۰/۸/۱۱
*نویسنده مسئول

مسئلهٔ مذکور و مسائل مشابه را، که در آن‌ها به یافتن تابع کنترلی $p(t)$ می‌پردازیم، محققان بسیاری بررسی کرده‌اند[۱]، [۲]، [۳]، [٤]. بخش بعدی این مقاله به کاربردهای فیزیکی این مسئله اختصاص داشته و در بخش‌های ۳ و ٤ به‌ترتیب به بررسی دو روش برای حل این مسئله می‌پردازیم. وانگ و لین روش اول را پیشنهاد کرده‌اند. در این روش ابتدا مسئلهٔ غیراستاندارد (۱) تا (۵) را به کمک دو تبدیل استاندارد کرده و سپس آن را به روش تفاضلات متناهی ضمنی حل می‌کنیم [۳]. در روش دوم به حل مستقیم مسئلهٔ غیراستاندارد (۱) تا (۵) می‌پردازیم و در نهایت در بخش ۵، با ارائهٔ مثال‌هایی به مقایسهٔ آن‌ها می‌پردازیم.

کاربردهای فیزیکی

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی به‌وسیلهٔ معادلات با مشتقات جزئی سهموی با شرط کرانه‌ای انتگرالی مدل‌بندی می‌شوند. از جملهٔ این مسائل می‌توان به نظریهٔ کنترل، مسائل پزشکی، فرآیندهای شیمیایی و زیستی اشاره کرد [۵]. در این مقاله به اجمال به بررسی چند کاربرد از این گونه مسائل می‌پردازیم.

شرط کرانه‌ای:

$$\int_0^b u(x,t)\,dx = E(t); \qquad 0 < b \le 1, \qquad\qquad 0 \le t \le T,$$

در مسائل مختلف، جرم یا انرژی را تعیین می‌کند. مثلاً اگر در یک فرآیند هدایت گرمائی، u معرف دما باشد آن گاه سیگنال الکتریکی تولید شده به‌وسیلهٔ این ماده متناسب با $\int_0^{s(t)} u(x,t)\,dx$ یعنی جرم ماده است. حال اگر $p(t)$ را منبع نور در نظر بگیریم، این مسئله را می‌توان به صورت (۱) تا (۵) مدل‌بندی کرد [۲]. از جمله کاربردهای مسئلهٔ (۱) تا (۵) در طبیعت می‌توان به فرآیند فتوسنتز در برگ‌ها و همچنین نفوذ در بافت‌های بدن اشاره کرد:

فرآیند فتوسنتز در برگ‌ها شامل زنجیره‌ای از واکنش‌های شیمیایی و فتوشیمیایی است که در نهایت منجر به تولید قند می‌شود. نفوذ و مصرف CO_2 در مزوفیل با یک معادله با مشتقات جزئی سهموی مدل‌بندی می‌شود [٦].

در بسیاری از کاربردهای پزشکی و زیستی، انتقال جرم به‌وسیلهٔ نفوذ در بافت‌ها عملی می‌شود. از جمله این بافت‌ها می‌توانیم بافت مغز را نام ببریم. نفوذ جرم در بافت مغز با معادلهٔ سهموی نشان داده می‌شود [۷].

روش استانداردسازی برای حل مسئلهٔ (۱) تا (۵)

در این روش ابتدا به‌کمک تبدیلات:

$$r(t) = e^{-\int_0^t p(\tau)d\tau}, \qquad (۶)$$

و

$$v(x,t) = r(t)u(x,t), \qquad (۷)$$

مسئلهٔ (۱) تا (۵) را استاندارد می‌کنیم. برای حالت اول و دوم به ترتیب داریم :

$$\begin{cases} v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) + f(x,t)r(t); & 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \\ v(x,0) = \varphi(\mathrm{x}); & 0 < x < 1, \\ v_{\mathrm{x}}(0,t) = u_{\mathrm{x}}(0,t)r(t) = g_1(t)r(t); & 0 < t \le T, \\ v(1,t) = u(1,t)r(t) = g_2(t)r(t); & 0 < t \le T, \\ \int_0^{\mathrm{s(t)}} \mathrm{v(x,t)\,dx} = E(t)r(t); & 0 < s(t) \le 1, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{۸}$$

و

$$\begin{cases} v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) + f(x,t)r(t); & 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \\ v(x,0) = \varphi(\mathrm{x}); & 0 < x < 1, \\ v_{\mathrm{x}}(0,t) = u_{\mathrm{x}}(0,t)r(t) = g_1(t)r(t); & 0 < t \le T, \\ v_{\mathrm{x}}(1,t) = u_{\mathrm{x}}(1,t)r(t) = g_2(t)r(t); & 0 < t \le T, \\ \int_0^{\mathrm{s(t)}} \mathrm{v(x,t)\,dx} = E(t)r(t); & 0 < s(t) \le 1, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{۹}$$

حال به‌کمک طرح تفاضلات متناهی ضمنی به حل مسائل استاندارد شدهٔ اخیر می‌پردازیم. بدین منظور بازه‌های [0,1] و [0,T] را به‌ترتیب به M و N زیربازه با طول گام‌های $h = \frac{1}{M}$ و $\tau = \frac{T}{N}$ تقسیم می‌کنیم. به این ترتیب داریم:

$$x_{\mathrm{j}} = \mathrm{jh}, \qquad t_n = n\tau.$$

از این‌رو توابع شبکه‌ای را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$u_j^n = u\left(x_{\mathrm{j}}, t_n\right), \qquad v_j^n = v\left(x_{\mathrm{j}}, t_n\right), \qquad f_j^n = f\left(x_{\mathrm{j}}, t_n\right),$$

و همچنین داریم:

$$p^n = p(t_n)\,, \qquad r^n = r(t_n).$$

در روابط اخیر برای مسئلهٔ (۸)، $0 \le \mathrm{j} \le M-1$ و $0 \le \mathrm{n} \le N$ و برای مسئلهٔ (۹)، $0 \le \mathrm{j} \le M$ و $0 \le \mathrm{n} \le N$ هستند. سپس نقطهٔ $x = -h$ را برای تولید نقاط خارجی مورد نیاز شرط کرانه‌ای مسئلهٔ (۸) و نقاط $x = -h$ و $x = (M+1)h$ را برای تولید نقاط خارجی مورد نیاز برای شرط کرانه‌ای نوع دوم مسئلهٔ (۹) به بازهٔ [0,1] می‌افزاییم. روش تفاضلات متناهی ضمنی با به‌کار بردن روش اویلر پسرو برای قسمت زمانی و روش تفاضل مرکزی برای قسمت مکانی به‌دست می‌آید که دارای خطای قطع موضعی $O(\tau + h^2)$ است و پایدار مطلق است [۸].

روش تفاضلات متناهی ضمنی برای مسائل (۸) و (۹) به‌ترتیب، بدین صورت است:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}\left(v_j^{n+1} - v_j^n\right) = \frac{1}{h^2}\left(v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}\right) + r^{n+1} f_j^{n+1}, \\ v_j^0 = \varphi_{j,} \\ v_{-1}^n = v_1^n - 2hr^n g_1(t_n), \\ v_M^n = r^n g_2(t_n), \end{cases} \tag{۱۰}$$

و

$$\begin{cases}\frac{1}{\tau}\left(v_j^{n+1}-v_j^n\right)=\frac{1}{h^2}\left(v_{j-1}^{n+1}-2v_j^{n+1}+v_{j+1}^{n+1}\right)+r^{n+1}f_j^{n+1},\\ v_j^0=\varphi_{j,}\\ v_{-1}^n=v_1^n-2hr^n g_1(t_n)\ ,\\ v_{M+1}^n=v_{M-1}^n+2hr^n g_2(t_n)\ ,\end{cases} \qquad (۱۱)$$

و برای شرط فوق اضافی انتگرالی مسائل (۸) و (۹) می‌یابیم:

$$r(t_n)=\frac{1}{E(t_n)}\int_0^{s(t_n)} v(x,t_n)\,dx. \qquad (۱۲)$$

با تقریب عبارت انتگرالی اخیر به‌وسیلهٔ قاعدهٔ ذوزنقه‌ای نتیجه می‌شود:

$$\int_0^{s(t_n)} v(x,t_n)\,dx=\int_0^{kh} v(x,t_n)dx+\int_{kh}^{s(t_n)} v(x,t_n)dx$$

$$=h\left[\frac{v(x_0,t_n)}{2}+v(x_1,t_n)+\cdots+v(x_{k-1},t_n)+\frac{v(x_k,t_n)}{2}\right]+\int_{kh}^{s(t_n)} v(x,t_n)dx.$$

به کمک درون‌یاب پیش‌رو نیوتن داریم:

$$\int_{kh}^{s(t_n)} v(x,t_n)dx=\left(\delta(t_n)-\frac{\delta^2(t_n)}{2h}\right)v(x_k,t_n)+\frac{\delta^2(t_n)}{2h}v(x_{k+1},t_n), \qquad (۱۳)$$

که در آن $\delta(t_n)=s(t_n)-k(t_n)h$ و $k(t_n)=[\frac{s(t_n)}{M}]$. حال با توجه به دو رابطهٔ اخیر داریم:

$$\int_0^{s(t_n)} v(x,t_n)\,dx=h\left[\frac{v(x_0,t_n)}{2}+v(x_1,t_n)+\cdots+v(x_{k-1},t_n)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta(t_n)}{h}-\frac{\delta^2(t_n)}{2h^2}\right)\ v(x_k,t_n)+\frac{\delta^2(t_n)}{2h^2}v(x_{k+1},t_n)\right].$$

با قرار دادن رابطهٔ اخیر در رابطهٔ (۱۲) خواهیم داشت:

$$r(t_n)=\frac{h}{E(t_n)}\ \left[\frac{v(x_0,t_n)}{2}+v(x_1,t_n)+\cdots+v(x_{k-1},t_n)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta(t_n)}{h}-\frac{\delta^2(t_n)}{2h^2}\right)\ v(x_k,t_n)+\frac{\delta^2(t_n)}{2h^2}v(x_{k+1},t_n)\right]. \qquad (۱۴)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۱٤) در مسائل (۸) و (۹)، مسائل استاندارد شدهٔ (۸) و (۹) حل می‌شود. با حل مسئلهٔ معکوس استاندارد، مقادیر (v,r) را به‌دست می‌آوریم . حال با داشتن این مقادیر به راحتی از تبدیلات:

$$p(t)=-\frac{r'(t)}{r(t)}, \qquad (۱۵)$$

$$u(x,t)=\frac{v(x,t)}{r(t)}, \qquad (۱٦)$$

می‌توان زوج جواب (u,p) را به‌دست آورد. به این ترتیب مسئلهٔ معکوس حل می‌شود.

روش مستقیم برای حل عددی مسئلهٔ (۱) تا (۵)

برای حل مسئلهٔ (۱) تا (۵) به روش مستقیم، ابتدا با استفاده از (۱)، (۳) و (۵) داریم:

$$E^{'}(t) = s^{'}(t)u(s(t),t) + u_x(s(t),t) - g_1(t) + p(t)E(t) + \int_0^{s(t)} f(x,t)dx,$$

و به طور معادل می‌یابیم:

$$p(t) = \frac{E^{'}(t) - s^{'}(t)u(s(t),t) - u_x(s(t),t) + g_1(t) - \int_0^{s(t)} f(x,t)dx}{E(t)}. \qquad (۱۷)$$

با جای‌گزینی رابطهٔ (۱۷) در معادلهٔ (۱)، مسئلهٔ (۱) تا (۵) به مسئلهٔ زیر منجر می‌گردد:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \left\{\frac{E^{'}(t) - s^{'}(t)u(s(t),t) - u_x(s(t),t) + g_1(t) - \int_0^{s(t)} f(x,t)dx}{E(t)}\right\} u(x,t) + f(x,t); \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < t \le T, \qquad (۱۸)$$

$$u(x,0) = \varphi(\mathrm{x}); \qquad 0 \le \mathrm{x} \le 1 \qquad (۱۹)$$

$$u_{\mathrm{x}}(0,t) = g_1(t); \qquad 0 < t \le T, \qquad (۲۰)$$

$$Bu(1,t) = g_2(t); \qquad 0 < t \le T. \qquad (۲۱)$$

در این بخش با استفاده از روش تفاضلات متناهی ضمنی به حل عددی مسئلهٔ مستقیم (۱۸) تا (۲۱) می‌پردازیم. مشابه بخش پیش، بازه‌های $[0,1]$ و $[0,T]$ را به ترتیب به M و N زیربازه با طول گام‌های $h = \frac{1}{M}$ و $\tau = \frac{T}{N}$ تقسیم می‌کنیم. به‌این ترتیب داریم:

$$x_{\mathrm{j}} = \mathrm{jh}, \qquad t_n = n\tau.$$

لذا توابع شبکه‌ای را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$u_j^n = u\left(x_{\mathrm{j}}, t_n\right), \qquad v_j^n = v\left(x_{\mathrm{j}}, t_n\right), \qquad f_j^n = f\left(x_{\mathrm{j}}, t_n\right),$$

و همچنین داریم:

$$p^n = p(\mathrm{t_n}), \qquad r^n = r(t_n).$$

در روابط اخیر برای مسئلهٔ (۸)، $0 \le \mathrm{j} \le M-1$ و $0 \le \mathrm{n} \le N$ و برای مسئلهٔ (۹)، $0 \le \mathrm{j} \le M$ و $0 \le \mathrm{n} \le N$ هستند. بدین ترتیب روش تفاضلات متناهی ضمنی برای این مسئله در حالتی که شرط (۲۱) به صورت $u(1,t) = g_2(t)$ و همچنین در حالتی که شرط مذکور به شکل $u_x(1,t) = g_2(t)$ باشد، به ترتیب بدین‌صورت است:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) = \frac{1}{h^2}\left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right) + a(u(s(t_n),t_n))u_j^{n+1} + f_j^{n+1}, \\ u_j^0 = \varphi_{j,} \\ u_{-1}^n = u_1^n - 2hg_1(t_n), \\ u_M^n = g_2(t_n), \end{cases} \qquad (۲۲)$$

و

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) = \frac{1}{h^2}\left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right) + a(u(s(t_n),t_n))u_j^{n+1} + f_j^{n+1}, \\ u_j^0 = \varphi_{j,} \\ u_{-1}^n = u_1^n - 2hg_1(t_n), \\ u_{M+1}^n = u_{M-1}^n + 2hg_2(t_n). \end{cases} \qquad (۲۳)$$

در مسائل (۲۲) و (۲۳) داریم:

$$a\big(u(s(t_n),t_n)\big)=\frac{E'(t_n)-s'(t_n)u(s(t_n),t_n)-u_x(s(t_n),t_n)+g_1(t_n)-\int_0^{s(t_n)}f(x,t_n)dx}{E(t_n)}.$$

با توجه به چگونگی قرار گرفتن $s(t_n)$ بر روی محور مختصات برای $u(s(t_n),t_n)$ و $a(u(s(t_n),t_n))$ در معادلهٔ اخیر به ازای هر $0\le \mathrm{n}\le N$ دو حالت داریم :

حالت اول: اگر $s(t_n)$ یکی از نقاط گرهی باشد یعنی:

$$s(t_n)=\ x_j\ ;\quad 0\le \mathrm{j}\le M,$$

آن‌گاه

$$u(s(t_n),t_n)=u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}}.$$

حالت دوم: اگر $s(t_n)$ نقطهٔ گرهی نباشد و $x_0<s(t_n)<x_M$ آن گاه عدد صحیحی مثل $k=[\frac{s(t_n)}{h}]$ وجود دارد به‌طوری که $x_k<s(t_n)<x_{k+1}$ و همچنین x_k و x_{k+1} نقاط گرهی هستند. در این حالت به کمک درون‌یابی لاگرانژ در نقاط $\mathrm{x_k}$ و $\mathrm{x_{k+1}}$ خواهیم داشت:

$$u(s(t_n),t_n)=\frac{(\mathrm{k}+1)\mathrm{h}-s(t_n)}{\mathrm{h}}u_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}-\frac{\mathrm{kh}-s(t_n)}{\mathrm{h}}u_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{n}},$$

و

$$u_{\mathrm{x}}(s(t_n),t_n)=\left(\frac{(\mathrm{k}+1)\mathrm{h}-s(t_n)}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{u_{k+1}^n-u_{k-1}^n}{2h}\right)-\left(\frac{\mathrm{kh}-s(t_n)}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{u_{k+2}^n-u_k^n}{2h}\right).$$

از مسئلهٔ (۲۲) به دستگاه $M\times M$ زیر می‌رسیم:

$$A_1\mathrm{U}^{\mathrm{n}+1}=\mathrm{U}^{\mathrm{n}}+\mathrm{B}_1, \tag{۲۴}$$

که در آن A_1 ماتریسی سه قطری و B_1 ماتریسی ستونی و بردار جواب $\mathrm{U^n}$ به‌ترتیب بدین صورت است:

$$A_1=\begin{pmatrix}\tilde a & \frac{-2\tau}{h^2} & 0 & \cdots & 0\\ \frac{-\tau}{h^2} & \tilde a & \frac{-\tau}{h^2} & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \frac{-\tau}{h^2} & \tilde a & \frac{-\tau}{h^2}\\ 0 & \dots & 0 & \frac{-\tau}{h^2} & \tilde a\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}-\frac{2\tau}{\mathrm{h}}\mathrm{g}_1^{\mathrm{n}+1}+\tau\mathrm{f}_0^{\mathrm{n}+1}\\ \tau\mathrm{f}_1^{\mathrm{n}+1}\\ \vdots\\ \tau\mathrm{f}_{\mathrm{M}-2}^{\mathrm{n}+1}\\ \frac{2\tau}{\mathrm{h}^2}\mathrm{g}_2^{\mathrm{n}+1}+\tau\mathrm{f}_{\mathrm{M}-1}^{\mathrm{n}+1}\end{pmatrix},\quad \mathrm{U}^{\mathrm{n}}=(u_0^n,u_1^n,\cdots,u_{M-1}^n)^{\mathrm{T}}.$$

و مسئلهٔ (۲۳) به دستگاه $(M+1)\times(M+1)$ زیر منجر می‌شود:

$$A\mathrm{U}^{\mathrm{n}+1}=\mathrm{U}^{\mathrm{n}}+\mathrm{B}. \tag{۲۵}$$

در دستگاه اخیر A ماتریسی سه قطری و B ماتریسی ستونی بدین صورت است:

$$A=\begin{pmatrix}\tilde a & \frac{-2\tau}{h^2} & 0 & \cdots & 0\\ \frac{-\tau}{h^2} & \tilde a & \frac{-\tau}{h^2} & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \frac{-\tau}{h^2} & \tilde a & \frac{-\tau}{h^2}\\ 0 & \dots & 0 & \frac{-2\tau}{h^2} & \tilde a\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-\frac{2\tau}{\mathrm{h}}\mathrm{g}_1^{\mathrm{n}+1}+\tau\mathrm{f}_0^{\mathrm{n}+1}\\ \tau\mathrm{f}_1^{\mathrm{n}+1}\\ \vdots\\ \tau\mathrm{f}_{\mathrm{M}-1}^{\mathrm{n}+1}\\ \frac{2\tau}{\mathrm{h}}\mathrm{g}_2^{\mathrm{n}+1}+\tau\mathrm{f}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{n}+1}\end{pmatrix}.$$

بردار جواب $\mathrm{U^n}$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\mathrm{U^n} = (u_0^n, u_1^n, \cdots, u_M^n)^T.$$

شایان ذکر است که در ماتریس‌های A و A_1 داریم:

$$\tilde{a} = 1 + \frac{2\tau}{\mathrm{h}^2} - \tau\, a\big(u(s(t_n), t_n)\big).$$

با حل دستگاه‌های (۲٤) و (۲۵) به روش حذفی گاوس با محورگیری ستونی می‌توانیم همهٔ مقادیر $u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}+1}$ را به ازای $j = 0,1,\cdots,M$ به‌دست آوریم. با در دست داشتن مقادیر u می‌توان از رابطهٔ (۱۷)، $p(t)$ را به‌دست آورد. به این طریق مسئلهٔ معکوس مورد نظر حل می‌شود. لازم به ذکر است طرح‌های تفاضلی (۲٤) و (۲۵) پایدار و سازگار هستند و مرتبهٔ همگرایی آن‌ها $O(\tau + h^2)$ هستند [۸].

نتایج عددی

مثال۱. مسئلهٔ معکوس زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + p(t)u(x,t) + (\pi^2 + 2t)e^t \cos\pi x + 2e^t \mathrm{xt}; && \\
&0 < x < 1, && 0 < t \le 1,\\
&u(x,0) = x + \cos\pi x\,; && 0 < x < 1,\\
&u_x(0,t) = e^t; && 0 < t \le 1,\\
&u(1,t) = 0; && 0 < t \le 1,\\
&\int_0^{\frac{1+t}{2}} u(x,t)dx = \mathrm{e^t}\left\{\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi(1+t)}{2}\right) + \frac{(1+t)^2}{8}\right\}; && 0 \le t \le 1.
\end{aligned}$$

جواب واقعی این مسئله عبارت است از:

$$u(x,t) = e^t(x + \cos\pi x),$$

و

$$p(t) = 1 - 2t.$$

با حل این مسئله مطابق روش‌هایی که شرح دادیم و با انتخاب $h = 0.01$ و $\tau = 0.001$ داریم:

جدول۱. مقادیر دقیق و تقریبی p(t)

مقدار واقعی p(t)	مقدار p(t) در روش دوم	مقدار p(t) در روش اول	t
0.8	0.79871074762088	0.79525486819271	0.1
0.6	0.59871074762088	0.59426328254142	0.2
0.4	0.39857045137511	0.39371166295291	0.3
0.2	0.19843058344622	0.19344496485992	0.4
0.0	-0.0017537688877	-0.00651316348892	0.5
-0.2	-0.2019831631773	-0.20614115729867	0.6
-0.4	-0.4022583261365	-0.40543513439588	0.7
-0.6	-0.6025801288717	-0.60440827007286	0.8

جدول ۲. مقادیر دقیق و تقریبی $u(x, 0.5)$

مقدار واقعی $u(x,0.5)$	$u(x,0.5)$ در روش دوم	$u(x,0.5)$ در روش اول	x
1.73289923512380	1.72845865635990	1.73298618202859	0.1
1.66358778112389	1.65943613294258	1.66366345353824	0.2
1.46371042926848	1.46001691033510	1.46376915475728	0.3
1.16897139991385	1.16586438648478	1.16900974601668	0.4
0.82436063535006	0.82191404144753	0.82437787304813	0.5
0.47974987078648	0.47797640965759	0.47974823185266	0.6
0.18501084143165	0.18386278121632	0.18499554635519	0.7
-0.0148665104237	-0.01548910667503	-0.0148874533176	0.8

مثال۲. معادلهٔ سهموی:

$$u_t = u_{xx} + p(t)u + (1-\pi^2)e^{-t^2}\sin \pi x + 2t - 1; \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < t \le 1,$$

با شرایط اولیه و کرانه‌ای

$$u(x,0) = 1 - \sin(\pi x); \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$u_x(0,t) = -\pi e^{-t^2}; \qquad 0 < t \le 1,$$

$$u_x(1,t) = \pi e^{-t^2}; \qquad 0 < t \le 1,$$

$$\int_0^{\frac{1+t}{2}} u(x,t)\,dx = \frac{1+t}{2} + \frac{e^{-t^2}}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi(1+t)}{2}\right) - 1\right]; \qquad 0 \le t \le 1,$$

را در نظر می‌گیریم. جواب واقعی این مسئله عبارت است از:

$$u(x,t) = 1 - e^{-t^2}\sin(\pi x),$$

و

$$p(t) = 1 - 2t.$$

با انتخاب $h = 0/01$ و $\tau = 0/005$ برای برخی نقاط انتخابی داریم:

جدول ۳. مقادیر دقیق و تقریبی p(t)

مقدار واقعی p(t)	مقدار p(t) در روش دوم	مقدار p(t) در روش اول	t
0.8	0.79799367677964	0.785156525952651	0.1
0.6	0.59631163618863	0.587713213761857	0.2
0.4	0.39534231109724	0.389687053612913	0.3
0.2	0.19494135537158	0.191054582901252	0.4
0.0	-0.00504968266941	0.008120809810522	0.5
-0.2	-0.2047745649556	-0.020774672861942	0.6
-0.4	-0.4043434922786	-0.40773739643491	0.7
-0.6	-0.6038349518775	-0.60802627480856	0.8

جدول ۴. مقادیر دقیق و تقریبی $u(x, 0.5)$

x	$u(x, 0.5)$ در روش اول	$u(x, 0.5)$ در روش دوم	$u(x, 0.5)$ مقدار واقعی
0.1	0.75928890771779	0.75309529443821	0.75933732279842
0.2	0.54217868868552	0.53679335339898	0.54223238523680
0.3	0.36988801862598	0.36506187818097	0.36993693126272
0.4	0.25927369803537	0.25477589234399	0.25931644036417
0.5	0.22115839217381	0.21676951911709	0.22119921692860
0.6	0.25927369803537	0.25477589234399	0.36993693126272
0.7	0.36988801862598	0.36506187818097	0.3699363126272
0.8	0.54217185400738	0.53679335339898	0.54223238523680

که اعداد جداول فوق با نرم افزار matlab تا (14D) محاسبه شده‌اند.

نتیجه‌گیری

چنان‌که در مثال‌های اخیر مشاهده کردیم در حالتی که شرط کرانه‌ای مسئله نوع دوم (نیومن) است، از روش دوم تقریب بهتری برای p(t) و از روش اول تقریب بهتری برای $u(x, 0.5)$ حاصل می‌شود. همچنین در حالتی که شرط کرانه‌ای مسئله نوع سوم (آمیخته) است، روش اول از خطای کم‌تری برخوردار است. در حالت کلی می‌توان گفت، روش دوم از جهت حجم کم عملیات نسبت به روش اول ارجحیت دارد.

منابع

1. J. R. Cannon, S. H. Wang and Y. Lin, "Determination of a control function in a parabolic partial differential equation", Appl. Math. Comput. 132 (2002) 299-313.
2. J. R. Cannon, "The One Dimensional Heat Equation", Addision-Wesley, Publishing Company, California (1984).
3. Sh. Wang and Y. Lin, "A finite difference solution to an inverse problem for determining a control function in a parabolic partial differential equation", Inverse Problems, 5 (1989) 631-640.
4. Sh. Wang and Y. Lin, "An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation", Appl. Math., Model, 25 (2001) 743-754.
5. Murthy ASV, J. G Verwer, "Solving parabolic integro-differential equations by an explicit integration method", J. Comput. Appl. Math. 39 (1992) 121-132.
6. A. A. Luushinkov, T. Ahonen, T. Vesala, E. Juurola, E. Nikinmaa and P. Hari, "Modelling of light-driven RUBP regeneration carboxylation and CO_2 diffusion for leaf photosynthesis", J. Theor. Biol. 188 (1997) 143-151.

7. A. R. A Khaled and K.Vafai, "The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues", J. Heat Mass Transfer, 46 (2003) 4989-5003.

8. L. Lapidus, G. F. Pinder, "Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering", Wiley, New York (1982).