گروه خودریختی‌های یک (۱۱۵,۱۹,۳)-۲ طرح متقارن

عبدالرضا اسکویی: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
غلامرضا صفا کیش‌همدانی: دانشگاه بوعلی‌سینا همدان
محمدجواد اسلامپور: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

چکیده

در این مقاله گروه خودریختی طرح‌های متقارن با ۳ $=\lambda$ بررسی شده است، و درحالت خاص، یک (۱۱۵,۱۹,۳)-۲ طرح متقارن که وجود یا عدم آن معلوم نیست درنظر گرفته و ثابت شده است که اگر f یک خودریختی از این طرح باشد، آن گاه $o(f) = ۲^{\alpha}\, ۳^{\beta}\, ۵^{\gamma}\, ۱۹^{\sigma}$. همچنین درباره نقاط ثابت این خودریختی‌ها نتایجی به دست آمده است.

۱- مقدمه

فرض کنید X یک v- مجموعه و $P_i(X)$ مجموعه i- زیر مجموعه‌های X باشند. دوتایی $D=(X,\mathbf{B})$ که در آن $\mathbf{B}$ گردایه‌ای از عناصر $P_k(X)$ (معمولاً *بلوک* نامیده می‌شوند) است، یک (v,k,λ)-۲ *طرح بلوکی* (یا به طور خلاصه *طرح*) می‌نامیم. هرگاه هر عضو از $P_2(X)$، λ بار در بلوک‌های $\mathbf{B}$ ظاهر شود، اگر $|\mathbf{B}|=v$ آن گاه طرح را متقار ن می‌گوییم. در هر طر ح متقارن، دفعات ظهور هر عنصر X دربلوک‌های $\mathbf{B}$، برابر با k است.

مثال: قراردهید $X=\{۱،۲،۳...،۷\}$ و

$$\begin{aligned}\mathbf{B}:\quad & B_1=\{1,2,3\} \quad B_4=\{2,4,6\} \quad B_6=\{3,4,7\}\\ & B_2=\{1,4,5\} \quad B_5=\{2,5,7\} \quad B_7=\{3,5,6\}\\ & B_3=\{1,6,7\}\end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود $D=(X,\mathbf{B})$، یک (۷,۳,۱)-۲ طرح متقارن است.

نگاشت ψ بین دو طرح $D=(X,\mathbf{B})$ و $D'=(X',\mathbf{B}')$ یک *یک‌ریختی* نامیده می‌شود، هرگاه $\psi: X \to X'$ یک تناظر یک به یک باشد به طوری که $\psi(\mathbf{B})=\mathbf{B}'$.

هر یک‌ریختی از یک طرح D به توی خودش را یک *خودریختی* می‌نامیم. مجموعه کلیه خودریختی‌های طرح D همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می‌دهد که به آن گروه خودریختی‌های طرح می‌گویند

و با $\mathrm{Aut}(D)$ نمایش داده می‌شود. گروه خودریختی‌های یک طرح، راهی برای یافتن طرح است که محققان زیادی از این طریق طرح‌هایی که قبلاً وجود یا عدم آن‌ها معلوم نبوده یافته‌اند.

فرض کنید $D=(X,\mathbf{B})$ و $f\in \mathrm{Aut}(D)$ تعریف می‌کنیم:

$$fix(f)=\{x\in X: f(x)=x\},$$

$$x \text{ مدار } =(x)=\{f(x): f\in \mathrm{Aut}(D)\}.$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که مدارها X را افراز می‌کنند.

اگر D و $\alpha\in \mathrm{Aut}(D)$ یک (v,k,λ)-۲ طرح متقارن باشد، آن گاه α یک خودریختی روی بلوک‌ها القا می‌کند که با $\alpha_{\mathbf{B}}$ نمایش می‌دهیم. اگر D یک (v,k,λ)-۲ طرح متقارن باشد، آن گاه ارتباط نزدیکی بین α و $\alpha_{\mathbf{B}}$ وجود دارد.

مثال: $\alpha=(۴۵)(۲۶)$ یک خودریختی طرح داده شده در مثال قبل است. با اعمال α روی بلوک‌ها داریم:

$$\alpha_{\mathbf{B}}=(B_4B_5)(B_6B_7).$$

قضیه زیر موسوم به لم *کشی-فروبنیوس* است.

قضیه: اگر G گروه جایگشتی روی X و r تعداد مدارهای آن روی X باشد، آن گاه

$$r=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}|fix(\alpha)|.$$

لم زیر تعداد بلوک‌های یک (v,k,λ)-۲ طرح را بر حسب k، λ و v به دست می‌دهد.

لم۱ [۴] : در یک (v,k,λ)-۲ طرح $D=(X,\mathbf{B})$ داریم

$$b=|\mathbf{B}|=\lambda\frac{\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}.$$

لم‌های۲و۳ ارتباط بین α و $\alpha_{\mathbf{B}}$ را که α خودریختی یک طرح متقارن است بیان می‌کنند.

لم۲ [۴] : فرض کنید D یک طرح متقارن و $\alpha\in \mathrm{Aut}(D)$. در این صورت

$$|fix(\alpha)|=|fix(\alpha_{\mathbf{B}})|.$$

لم۳ [۴] : اگر D یک طرح متقارن و $G\le \mathrm{Aut}(D)$، آن گاه تعداد مدارهای ساخته شده توسط G روی نقاط و بلوک‌ها با هم مساوی‌اند.

لم زیر کران بالایی برای تعداد نقاط ثابت یک خودریختی طرح متقارن ارائه می‌کند که نقش اساسی در ادامه مقاله ایفا می‌کند.

لم۴ [۲] : فرض کنید D یک (v,k,λ)-۲ طرح متقارن و $\alpha\in \mathrm{Aut}(D)$ غیر همانی باشد. اگر $f=|fix(\alpha)|$،

آن گاه
$$f \le \begin{cases} \frac{1}{4}(v+3k-6) & o(\alpha) \ge 3, \\ \frac{1}{3}(v+2k-4) & o(\alpha) = 2. \end{cases}$$

لم زیر خاصیت مهمی را درمورد طرح‌های متقارن در رابطه با اشتراک بلوک‌ها بیان می‌کند.

لم۵ [۴] : هر دو بلوک یک (v,k,λ)-۲ طرح متقارن در λ نقطه مشترکند.

۲- نتایجی درباره گروه خودریختی طرح‌های متقارن

در این بخش بعضی از نتایج خودریختی‌هایی از مرتبه عدد اول p یک طرح متقارن را ارائه می‌کنیم. سپس در باره طرح‌های متقارن با λ=۳ نتایجی را بیان می‌کنیم.

در سرتاسر این بخش منظور از D یک (v,k,λ)-۲ طرح متقارن $D=(X,\mathbf{B})$ است.

لم۶: فرض کنید $\alpha \in \mathrm{Aut}(D)$ و $o(\alpha)=p$ یک عدد اول باشد در این صورت

الف) اگر $B_1, B_2 \in fix(\alpha_B)$ و $\lambda < p$ و $x \in B_1 \cap B_2$ آن گاه $x \in fix(\alpha)$

ب) اگر $x, y \in fix(\alpha)$ و $\lambda < p$ آن گاه کلیه بلوک‌های شامل x, y، بلوک ثابت هستند.

ج) اگر $p > \lambda - 1 > 1$، آن گاه برای هر بلوک B، $B \not\subset fix(\alpha)$.

اثبات:

الف) اگر $x \notin fix(\alpha)$، آن گاه $orbit(x) \subseteq B_1 \cap B_2$ و بنا بر این $|B_1 \cap B_2| \ge p > \lambda$ و این تناقض با لم ۵ است.

ب) چون $x, y \in fix(\alpha)$، بنا بر این اگر $x, y \in B$، آن گاه $x, y \in \alpha_B$. اگر $\alpha(B) \neq B$، آن گاه مدار B تحت α شامل حداقل p بلوک است و هر کدام نیز شامل x, y هستند. پس x, y حداقل در p بلوک ظاهر می‌شوند که این متناقض با $\lambda < p$ است.

ج) فرض کنید $B \subseteq fix(\alpha)$. اگر B' یک بلوک D باشد، آن گاه $|B \cap B'| = \lambda > 2$. پس B' شامل حداقل دو نقطه ثابت است. بنا بر قسمت (ب) B' بلوک ثابت است. پس هر بلوک این طرح تحت α ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه α خودریختی همانی است که خلاف فرض است.

لم۷: فرض کنید D یک $(v,k,3)$-۲ طرح متقارن و $\alpha \in \mathrm{Aut}(D)$ از مرتبه عدد اول $p \ge 5$ باشد. اگر بلوک ثابت B_0 شامل m نقطه ثابت باشد، آن گاه

$$|fix(\alpha)| = \frac{2}{3}\binom{m}{2} + 1.$$

اثبات: فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ، نقاط ثابت B_0 باشند. هر بلوک دیگر شامل یک زوج از x_i ها بلوک ثابت است (بنا بر لم۶ب). برای هر بلوک ثابت B_l ، داریم $|B_l \cap B_0| = 3$ (بنا بر لم۵) و $B_l \cap B_0 \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ حال مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

$$S = \{(\{x_i, x_j\}, B) \mid x_i, x_j \in \{x_1, \ldots, x_m\},\ x_i, x_j \in B,\ B \neq B_0\}.$$

$|S|$ را به دو صورت می‌شماریم. هر بلوک ثابت شامل سه عضو از مجموعه $\{x_1, \ldots, x_m\}$ است تعداد بلوک‌های ثابت به غیر از B_0 برابر $|fix(\alpha)|-1$ است. پس $|S| = 3(|fix(\alpha)|-1)$. از طرف دیگر هر زوج از عناصر مجموعه $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ به غیراز B_0 در دو بلوک ثابت دیگر ظاهر می‌شود. پس $|S| = \binom{m}{2} \times 2$ و در نتیجه $|fix(\alpha)| = \frac{2}{3}\binom{m}{2} + 1$.

لم۸: با مفروضات لم۷، تعداد نقاط ثابت کلیه بلوک‌های ثابت D ، برابر با m است.

اثبات: فرض کنید B_1 و B_2 دو بلوک ثابت با تعداد نقاط ثابت m و m' باشند. در این‌صورت

$$|fix(\alpha)| = \frac{2}{3}\binom{m}{2} + 1 = \frac{2}{3}\binom{m'}{2} + 1$$

در نتیجه $m = m'$.

نتیجه۱: با مفروضات لم۷ ، یک $(|fix(\alpha)|, m, 3)$-۲ طرح متقارن درون طرح D وجود دارد.

اثبات: قرار دهید $\mathbf{B}' = \{B \cap fix(\alpha) \mid B \in fix(\alpha_{\mathbf{B}})\}$. با توجه به روند اثبات لم۸، $\mathbf{B}'$ گردایه‌ای از مجموعه‌های m-عضوی است. با توجه به لم۸، $\mathbf{B}'$ مجموعه بلوک‌های یک $(|fix(\alpha)|, m, 3)$-۲ طرح متقارن است.

لم۹: با مفروضات لم۷، اگر $o(\alpha)$ مساوی 2 و یا 3 باشد، آن گاه

$$|fix(\alpha)| \leq \frac{2}{3}\binom{m}{2} + 1.$$

اثبات: چون در این حالت ممکن است اشتراک دو بلوک ثابت، مجموعه نقاط ثابت نباشند، بنا بر این در روند اثبات لم۷، تعداد بلوک‌های ثابت شامل یک زوج از عناصر $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$، حداکثر $|fix(\alpha)|-1$ است. از اینجا مطلوب حاصل می‌شود.

لم۱۰: با مفروضات لم۷، $|fix(\alpha)| + |fix(\alpha)|(k-m) \leq v$.

اثبات: چون اشتراک هر دو بلوک ثابت زیرمجموعه‌ای از نقاط ثابت است، پس هر بلوک ثابت دارای $k-m$ نقطه است که در هیچ کدام از بلوک‌های ثابت دیگر ظاهر نمی‌شود. حال شمارش نقاط در بلوک‌های ثابت به نتیجه مطلوب خواهیم رسید.

لم‌های۷ و ۹، نقش اساسی در بررسی خودریختی‌های از مرتبه عدد اول p یک (v,k,λ)-۲ طرح متقارن بازی می‌کند و در بخش سوم خواهیم دید که نتایج لم۷ و ۹ نتایج قوی‌تری نسبت به لم٤ را به دست می‌دهد.

۳- گروه خودریختی یک (۱۱۵,۱۹,۳)-۲ طرح متقارن

دراین بخش به بررسی گروه خودریختی یک (۱۱۵,۱۹,۳)-۲ طرح متقارن می‌پردازیم. وجود یا عدم این طرح هنوز مشخص نشده است[۳]. همان‌طور که در بخش۱ مطرح کردیم، گروه خودریختی طرح‌ها راهی برای یافتن طرح است. در این بخش، D را یک(۱۱۵,۱۹,۳)-۲ طرح متقارن گرفته و خودریختی‌های از مرتبه عدد اول p آن‌ها را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $\alpha\in \mathrm{Aut}(D)$ و $o(\alpha)=p$ عددی اول باشد. بر اساس قضیه‌ای از Aschbacher [۱] که بیان می‌کند اگر α یک خودریختی $(v,k,\lambda)-2$طرح متقارن از مرتبه عدد اول p باشد، آن گاه $p|v$ یا $p\le k$ ، داریم

$$p\in\{2,3,5,7,11,13,17,19\}.$$

الف: $o(\alpha)=17$

در این حالت، بنا بر لم‌های۱ و ٤، $|fix(\alpha)|\in\{13,30\}$. اگر B یک بلوک ثابت باشد، آن گاه بنا بر لم‌های ٦ (ج) و ۱۰، B دقیقاً ۲ نقطه ثابت دارد. پس، $|fix(\alpha)|=\frac{2}{3}\binom{2}{2}+1$ (لم۸)، که عدد صحیح نیست. پس $17\nmid|\mathrm{Aut}(D)|$.

ب: $o(\alpha)=13$

مجدداً بنا بر لم٤، $|fix(\alpha)|\in\{11,24\}$. لم٦(ج) دلالت بر این دارد که هر بلوک ثابت دارای شش نقطه ثابت است و بنا بر این $|fix(\alpha)|=11$. نتیجه ۱ دلالت بر این دارد که یک (۱۱,٦,۳)- طرح متقارن درون ساختار این طرح وجود دارد. اما این متناقض با لم۱۰ است. پس عدد ۱۳ مرتبه گروه خودریختی را عاد نمی‌کند.

ج: $o(\alpha)=11$

لم٤ نتیجه می‌دهد که $|fix(\alpha)|\in\{5,16,27,38\}$. که همه موارد مشابه حالت‌های قبل رد می‌شود. پس $11\nmid|\mathrm{Aut}(D)|$.

د: $o(\alpha)=7$

مجدداً داریم $|fix(\alpha)|\in\{3,10,\ldots,38\}$. هربلوک ثابت ٥ یا ۱۲ نقطه دارد. اگرهمه بلوک‌ها ٥ نقطه ثابت داشته باشند. در این‌صورت لم ۸ دلالت دارد که $|fix(\alpha)|$ عدد صحیح نیست. پس بلوکی وجود دارد که ۱۲ نقطه ثابت دارد. در نتیجه بنا به لم ۸، $|fix(\alpha)|=45$ که غیر ممکن است. پس $7\nmid|\mathrm{Aut}(D)|$.

هـ $o(\alpha)=5$:

در اینجا $\left|fix(\alpha)\right|\in\{0,5,\ldots,40\}$ که همه حالت‌ها به جز $\left|fix(\alpha)\right|=0$ بنا به لم۷ رد می‌شود.

لم۱۱: اگر $5^{\beta}\mid\left|\mathrm{Aut}(D)\right|$ آن گاه $\beta\le 1$.

اثبات: فرض کنید $G\le\left|\mathrm{Aut}(D)\right|$ ازمرتبه۲۵ باشد. پس $G\simeq C_5\times C_5$ یا $G\simeq C_{25}$. حالت $G\simeq C_{25}$ به سادگی رد می‌شود. پس $G\simeq C_5\times C_5$ و درنتیجه مرتبه هر عنصر ۵ است. پس هیچ‌کدام از عناصر G به جز عنصر همانی نقطه ثابت ندارند. بنا بر لم کشی-فروبینیوس،

$$r=\frac{1}{25}\sum fix(\alpha)=\frac{115}{25}.$$

که یک تناقض است. پس $5^2\nmid\left|\mathrm{Aut}(D)\right|$.

و: $o(\alpha)=19$

در اینجا $\left|fix(\alpha)\right|=1$ و مشابه لم ۱۱، $19^2\nmid\left|\mathrm{Aut}(D)\right|$

قضیه زیر خلاصه بحث‌های فوق است:

قضیه: اگر $f\in\mathrm{Aut}(D)$ ، آن گاه $o(f)=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}19^{\sigma}$ که در آن

الف) $\beta,\gamma,\sigma\le 1$؛

ب) اگر $o(f)=19$ ،آن گاه $\left|fix(\alpha)\right|=1$؛

ج) اگر $o(f)=5$ ،آن گاه $\left|fix(\alpha)\right|=0$؛

منابع

1. M. Aschbacher, *On Collination Groups of Symmetric Block Design*, J. Combinatorail Theory Ser. A **11** (1971) 272-281

2. Bowler, *On the fixed points of an Automorphism of a symmetric design*, J. Combin. Theory Ser. A **43** (1986), 350-343.

3. Brouwer, *Block designs*, pp. 693-745 in Handbook of Combinatorics (ed. R.L. Graham, M. Grotschel, L. Lovasz), Elsevier, Amsterdam (1995).

4. E. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, Cambridge (1983).