[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]
[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

مدیریت پرتفوی چنددوره‌ای همراه با کنترل ورشکستگی تحت رویکرد برنامه‌ریزی پویا

خدیجه حسنلو[1]

تاریخ دریافت: ۹٤/۱۲/۲۵ تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۱/۱۰

چکیده

مدیریت کارای سبد اوراق بهادار از دیرباز تاکنون مورد توجه محققـان حـوزه مـالی و مطلـوب سرمایه‌گذاران بـوده اسـت. در ایـن پـژوهش بـه بررسـی مسـأله بهینـه‌سـازی سـبد اوراق بهـادار چنددوره‌ای برای مدیریت دارایی و بدهی برای سرمایه‌گذاری که قصد دارد قبل از رسـیدن بـه انتهای افق سرمایه‌گذاری خود، احتمال ورشکستگی را نیز کنتـرل نمایـد، پرداختـه شـده اسـت. سبد اوراق بهادار مورد بررسی، شامل مجموعه ای از دارایی‌های ریسکی، دارایی بدون ریسک و نوعی از بدهی است. یک مدل میانگین–واریانس که دارای محدودیت کنتـرل ورشکسـتگی در افق‌های زمانی مختلـف اسـت، ارائـه شـده اسـت. رویکـرد حـل در نظـر گرفتـه بـرای مـدل پیشنهادی، روش لاگرانژ افزاینده بهمراه برنامه‌ریزی پویا است که با توجـه بـه درجـه پیچیـدگی آن، الگوریتم ژنتیک برای ارائه جواب پیشنهاد می‌شود. نتایج عددی مدل بـا سـبدی متشـکل از ۱۰ شرکت پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران ، اوراق مشارکت به عنوان دارایـی بـدون ریسک و وام بانکی به عنوان بدهی سرمایه‌گذار، به عنوان خروجی مدل ارائه شده است. نتـایج حاکی ازآنست که کنترل ورشکستگی اثر پر معنایی روی استراتژی بهینه سـرمایه‌گـذاری دارد، به عبارت دیگر هنگامی که محدودیت کنترل ورشکستگی اعمال می‌شود، نسبت به زمانی کـه در نظر گرفته نمی‌شود، تعداد دفعات رسیدن به ورشکستگی کاهش چشمگیری دارد.

واژه‌هـای کلیـدی: مـدیریت پرتفـوی، مـدل میـانگین واریـانس، کنتـرل ورشکسـتگی، برنامه‌ریزی پویا، الگوریتم ژنتیک.

طبقه‌بندی JEL : C22,G12,G17.

۱. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه خاتم. Email: kh.hassanlou@khatamt.ac.ir

۱. مقدمه

سرمایه‌گذاری، همواره به منظور دستیابی به رفاه بیشتر در شرایط کنونی و آینده صورت می‌گیرد. در واقع، مقوله سرمایه‌گذاری با گستره و تنوع وسیعی در بازارهای مالی روبه‌رو است لذا یافتن بهترین تخصیص از دارایی‌ها که منجر به حداکثر بازده و حداقل ریسک باشد، همواره دغدغه اصلی سرمایه‌گذاران بوده است. درواقع نحوه تخصیص دارایی‌ها شیوه یا تکنیکی برای تشکیل سبد دارایی است که هدف از آن متوازن کردن ریسک این سبد و متنوع کردن محتویات آن از طریق تقسیم دارایی بین ابزارهای مختلف نظیر سهام، اوراق قرضه دولتی، اوراق قرضه شرکت‌ها و... است. هر یک از این ابزارهای سرمایه-گذاری ریسک و بازده خاص خود را در زمانهای مختلف دارد به همین سبب تأثیرات آن بر سبد دارایی با گذشت زمان تغییر می‌کند. بنابراین تشکیل سبد اوراق بهادار به عنوان یک تصمیم‌گیری حساس و حیاتی برای سرمایه‌گذاری شناخته شده است و انتخاب یک سبد اوراق بهادار با نرخ بازده بالا و ریسک کنترل شده، یکی از موضوعاتی است که همواره مورد توجه بسیاری از محققان این حوزه قرار گرفته است.

سبد اوراق بهادار یا پرتفوی[1]، درواقع مجموعه‌ای از اوراق بهادار و دارایی‌های متفاوت است که توسط فرد سرمایه‌گذار یا یک صندوق سرمایه‌گذاری تشکیل می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد پرسش اصلی در این حوزه نحوه توزیع و تخصیص سرمایه به دارایی-ها و تشکیل سبد اوراق بهادار و سپس مدیریت آن است.

در این مقاله تلاش شده تا با ارائه یک مدل جدید که به واسطه دارا بودن مشخصه‌هایی نظیر چند دوره‌ای بودن مدل، کنترل احتمال ورشکستگی سرمایه‌گذار قبل از رسیدن به انتهای افق زمانی، بهره‌گیری از ابزارهای مدیریت دارایی و بدهی[2](ALM) و نیز اتخاذ شیوه‌های مناسب برای مدلسازی و حل آن در رویارویی با درجه پیچیدگی خاص آن، بتوان گزینه‌های مناسب و کم خطرتری به سرمایه‌گذاران ارائه کرد. بدهی سرمایه‌گذار در

---

1. Portfolio
2. Asset Liability Management

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]
[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

این پژوهش از نوع برون‌زا[1] تعریف شده است. در بخش دوم مروری اجمالی از پیشینه تحقیق ارائه شده است. در بخش سوم، مدل پیشنهادی و رویکرود مناسبی جهت حل آن ارائه شده است. برای اجرای مدل توسعه‌یافته از داده‌های واقعی استفاده شده و تحلیل نتایج خروجی و اعتبارسنجی انجام گرفته بر روی نتایج در بخش چهارم مقاله جای گرفته است. نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات نیز در بخش نهایی این پژوهش ارائه می‌شود.

۲. پیشینه تحقیق

در بررسی سیر تاریخی سرمایه‌گذاری به سه مرحله مشخص از تئوری پردازی از این رشته از دانش بشری تحت عناوین تئوری‌های سنتی[2]، تئوری‌های مدرن[3] و تئوری‌های نوین[4] برخورد می‌شود (اسلامی بیدگلی و دیگران ۱۳۸۴). اگرچه بشر از قرن‌ها قبل با مقوله سرمایه‌گذاری سر و کار داشته ولی در انتخاب سرمایه‌گذاری‌ها از میان سرمایه‌گذاری‌های رقیب[5] از اواسط قرن نوزدهم قابل پیگیری است، و با رشد و توسعه تدریجی کشورها و در روابط تجاری بین‌المللی این تئوری‌ها نیز مورد ارزیابی، نقد و گسترش قرار گرفته‌اند. نهایتاً اینکه تئوری‌های سنتی سرمایه‌گذاری از دهه ۱۹۲۰ و با معرفی ارزش زمانی پول مورد نقد قرار گرفته و متعاقب ان ساختار انتخاب و ارزیابی طرح‌های سرمایه‌گذاری با آنچه که در گذشته بوده از برخی جهات متفاوت شده است.تنوع سازی و مدیریت سبد اوراق بهادار از واژه‌های نوظهور دوره تئوری‌های مدرن محسوب می‌شدند.

نخستین رویکرد علمی برای انتخاب یک سبد اوراق بهادار بهینه، مدل میانگین واریانس[6] نامیده شد که توسط هری مارکویتز در سال ۱۹۵۲ ارائه شد و توانست نقش کلیدی در تئوری انتخاب سبد اوراق بهادار ایفا کرده و جایزه نوبل اقتصادی را برای وی به ارمغان آورد. مدل وی به عنوان متداول‌ترین رویکرد در مسأله انتخاب سرمایه‌گذاری است. از

1. Exogenous Liability
2. Conventional Theories
3. Modern Theories
4. New Theories
5. Competitive Investment
6. Mean- Variance

برجسته ترین نکات مورد توجه در مدل مارکویتز، توجه به ریسک سرمایه‌گذاری، نه تنها بر اساس معیار یک سهم، بلکه بر اساس ریسک مجموعه سرمایه‌گذاری است. مدل مارکویتز یک مدل تک دوره‌ای است که درگیر مفروضات فراوانی است و همواره تلاش محققان بسیاری را برای بهبود مدل و رفع محدودیت‌های مجذوب خود ساخته است (مارکویتز ۱۹۵۲، ۱۹۵۶و۱۹۵۹).

تحقیقات صورت گرفته در این حوزه، فراوان است ولی در اینجا سعی شده به برخی از آنها که مرتبط با حوزه مورد بررسی در این پژوهش است به اختصار و با حفظ سیر تاریخی آن اشاره شود.

دون لی و وان لانگ (۲۰۰۰) یک حل بهینه تحلیلی برای فرمول میانگین –واریانس در انتخاب سبد اوراق بهادار چند دوره‌ای ارائه کردند. آنها یک الگوریتم کارا برای پیدا کردن سیاست سبد اوراق بهادار بهینه جهت حداکثر سازی تابع مطلوبیت از میانگین و واریانس سرمایه ی نهایی پیشنهاد کردند. در همان سال ژو ولی (۲۰۰۰) در پژوهش خود اقدام به ارائه مدل میانگین واریانس با زمان پیوسته با رویکرد برنامه ریزی تصادفی نمودند.

مارکوس و دیگران (۲۰۰۲) توانستند از تکنیک‌های مدیریت دارایی و بدهی برای بهینه- سازی مدل میانگین- واریانسی که دارای بدهی‌های درون زا و برون‌زا[1] است، استفاده کنند. مارکوس و هماکارانش در سال ۲۰۰۴، ر راستای تکمیل تحقیقات خود، رویکرد هندسی را برای بهینه‌سازی مدل میانگین- واریانس چند دوره‌ای از دارایی‌ها و بدهی‌ها پیشنهاد کردند (ماکوس و دیگران، ۲۰۰۴). بلکی و دیگران (۲۰۰۵) بر روی مسأله انتخاب سبد اوراق بهادار با زمان پیوسته همراه با ممنوعیت ورشکستگی تحت چارچوب میانگین- واریانس کار کردند. مشابه همین تحقیق در سال ۲۰۰۶ توسط چیو و لی برای مدیریت دارایی و بدهی با رویکرد حل متفاوت ارائه شد (چیو و لی، ۲۰۰۶). لی و دیگران در سال ۲۰۰۸ افق سرمایه‌گذاری غیرقطعی[2] را برای مسأله بهینه سازی سبد اوراق بهادار چند دوره‌ای در نظر گرفتند و مدیریت دارایی و بدهی را با این فرض، به خوبی انجام دادند (لی

1. Exogenous and Endogenous Liabilities
2. Uncertain Investment Horizon

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]
[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

و دیگران، ۲۰۰۸). جونز و براون در سال ۲۰۰۹ میلادی مفهوم مدیریت ریسک دارایی و بدهی را مسأله بهینه‌سازی مدل میانگین واریانس چند دوره‌ای همراه کردند (جونز و براون، ۲۰۰۹).

از آنجا که فرآیندهای بازار مالی از جمله معاملات، تغییرات قیمت سهم و ... ماهیتی کاملا تصادفی دارند، لذا ورود مدل‌های فرآیندهای تصادفی به این حوزه، ناگزیر است. در همین راستا تحقیقات فراوانی صورت گرفته که برخی از موضوعات مرتبط با پژوهش، عبارتند از: زی (۲۰۰۹) مساله مدیریت دارایی و بدهی را تحت مدل مارکوف رژیم سوئیچینگ با زمان پیوسته، مورد بررسی قرار می‌دهد. در سال ۲۰۱۱ نیز چن و یانگ مدیریت دارایی و بدهی میانگین- واریانس چند دوره‌ای را همراه با رژیم سوئیچینگ بررسی کردند که توانستند رویکرد جدیدی برای پیدا کردن استراتژی بهینه ارائه کنند(چن و یانگ، ۲۰۱۱)

سیدحسنیی و حسنلو (۲۰۱۰ و ۲۰۱۱) طی پژوهش هایی که روی مسأله بهینه‌سازی سبد توراق بهادار انجام دادند، توانستند با درنظر گرفتن نرخ‌های متفاوت برای وام‌دهی[1] و وام-گیری[2]، و اتخاذ رویکرد مناسب در رویارویی با عدم قطعیت موجود در ماهیت مسائل سرمایه‌گذاری، چندین مدل موفق و کاربردی در این حوزه ارائه نمایند.

ژانگ و در لی (۲۰۰۱۲) مدل میانگین واریانس چنددوره‌ای جدیدی را ارائه کردند که در آن علاوه بر اینکه افق زمانی غیرقطعی فرض شده، نرخ‌های بازده نیز به صورت متوالی همبسته هستند. همان سال، لی و لی (۲۰۱۲) یک مدل میانگین واریانس چند دوره‌ای را برای مدیریت بدهی و دارایی سرمایه‌گذار ارائه می‌کنند که همزمان تلاش می‌شود که احتمال ورشکستگی سرمایه‌گذار را نیز کنترل کند. رویکرد حل این مقاله مرجع اصلی پژوهش حاضر درنظرگرفته شده که سعی شده با بهبود مدل لی، بتوان تصمیمات سرمایه-گذاری بهتری را پیش روی سرمایه‌گذاران گذاشت.

1. Lending
2. Borrowing

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]
[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

همانطور که پیشتر نیز اشاره شد در این مقاله قصد آن را داریم که یک مدل چنددوره‌ای برای بهینه‌سازی سبدی متنوع از دارایی‌ها ارائه کنیم که همزمان ورشکستگی سرمایه‌گذار نیز تحت کنترل بوده و علاوه بر دارایی‌های بدهی او نیز مدیریت می‌شود. برای حل مدل رویکرد ریاضی کاملی ارائه خواهد شد که توسط داده‌های واقعی از بازار بورس اوراق بهادار تهران، خروجی مدل نیز پشتیبانی می‌شود.

۳. مدل پیشنهادی تحقیق

قبل از ارائه مدل پیشنهادی، پارامترها و متغیرهای مدل معرفی می‌شوند. در ابتدا فرض می‌کنیم که فقط یک دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک داریم و سپس مدل را به n دارایی ریسکی توسعه می‌دهیم. سرمایه گذار در نظر دارد یک طرح برای تخصیص سرمایه خود میان این دو دارائی در یک افق زمانی T دوره بسازد. سرمایه گذار در شروع هر دو دوره می تواند سبد اوراق بهادار خود را بازگردانی[1] کند. منظور از بازگردانی، تغییر در ترکیب دارائی های سبد اوراق بهادار است. یک فرض اساسی در مدل این است که دارائی ریسکی و دارائی بدون ریسک و بدهی در بین زمان های مختلف از نظر آماری مستقل هستند. پارامترهای مدل عبارتند از:

T= تعداد دوره های سرمایه‌گذاری

x_t: کل دارایی در زمان t ; (t = 0, 1…T)

u_t: میزان سرمایه گذاری در دارایی نوع اول (ریسکی) با نرخ بازگشت $\widetilde{r}_t$ در زمان t)
(t = 0, 1…T);

l_t: میزان بدهی در زمان t ;(t = 0, 1…T)

S_t: دارایی خالص در زمان t، $S_t = x_t - l_t$ (t = 0, 1…T)

$\widetilde{r}_t$: نرخ بازگشت دارایی نوع اول (ریسکی);(t = 0, 1…T)

r_t^0: نرخ بازگشت دارایی نوع دوم (بدون ریسک);(t = 0, 1…T)

q_t: نرخ بهره بدهی ;(t = 0, 1…T)

1. Rebalanced

$\omega t > 0$: درجه ریسک گریزی سرمایه گذار در زمانt (t = 0, 1…T);

b_t : حد اقل سود از پیش تعریف شده در دوره t (سطح فاجعه در دوره t)

(t = 0, 1…T);

در هر دوره زمانی برای دارایی ریسکی و دارایی بدون ریسک رابطه پویای زیر برقرار است:

$$x_{t+1} = r_t^{\circ}(x_t - u_t) + \widetilde{r}_t u_t = r_t^{\circ} x_t - r_t^{\circ} u_t + \widetilde{r}_t u_t = r_t^{\circ} x_t + (\widetilde{r}_t - r_t^{\circ}) u_t$$
$$\Rightarrow x_{t+1} = r_t^{\circ} x_t + r_t^1 u_t \qquad (t = 0,1,\ldots,T-1) \qquad (۱)$$

بدهی در مدل مربوطه، برون زا است بنابراین غیر قابل کنترل است و مستقل از سبد اوراق بهادار مورد نظر بوده و بدهی خود سرمایه گذار است که باید نحوه ی پرداخت بهره و اصل آن را مدیریت کند. رابطه دینامیک بدهی نیز در هر دوره زمانی به صورت زیر است:

$$l_{t+1} = q_t . l_t \qquad (t = 0,1,\ldots,T-1) \qquad (۲)$$

با توجه به روابط بالا مدل میانگین واریانس کلاسیک برای مسئله مدیریت دارائی و بدهی چند دوره ای $P(GMV(\omega_T))$ به صورت زیر است که همزمان به حداکثرسازی بازده انتظاری و حداقل‌سازی ریسک پرتفوی می‌پردازد:

(۳)

$$P(1): \underset{u}{Max} \qquad E[S_T] - \omega_T Var(S_T)$$

Subject to:

$$x_{t+1} = r_t^{\circ} x_t + r_t^1 u_t \qquad (t = 0,1,\ldots,T-1)$$
$$l_{t+1} = q_t . l_t \qquad (t = 0,1,\ldots,T-1)$$

$\omega_T > 0$ بوده و پارامتری معلومی است که نشان دهنده ی درجه ریسک گریزی سرمایه گذار است. در واقع پارامتری برای تبادل دو هدف ناسازگار از حداکثر سازی بازگشت مورد انتظار (مساله ۱) و حداقل سازی ریسک (مساله ۲) تعریف شده است.

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

۳-۱. مدل تعمیم یافته

اگر محدودیت کنترل ورشکستگی را به مدل قبل اضافه کنیم، مدل میانگین- واریانس تعمیم یافته[1] $P(GMV(\omega_T\ ,\ \alpha))$ بدست می آید. ورشکستگی زمانی اتفاق می افتد که مازاد کل کم تر از سطح پیش تعریف شده (فاجعه) در هر دوره باشد. به خاطر همین است که سرمایه‌گذار در ادامه سرمایه‌گذاری خود نباید به سمت ورشکستگی برود. بنابراین احتمال رفتن به سمت ورشکستگی سرمایه‌گذار در دوره t به صورت زیر بدست می آید:

$$P(BR_t) = P(S_t \le b_t, S_j > b_j, \qquad (j = ۱,۲,..., t-۱) \tag{۴}$$

داریم: $BR_i \cap BR_j = \phi$ ، بنابراین کل احتمال ورشکستگی در افق زمانی سرمایه گذار برابر است با: $\sum_{t=1}^{T-1} P(BR_t)$ و براساس نامساوی چبی شف، داریم:

$$P(S_t \le b_t) \le Var(S_t) \Big/ (E[S_t] - b_t)^۲ \tag{۵}$$

پس ما می توانیم، ریسک ورشکستگی در دوره t را به وسیله $\alpha_t \in (0,1)$ و محدودیت $Var(S_t) \Big/ (E[S_T] - b_t)^۲$ ، کنترل کنیم. بنابراین مدل تعمیم یافته $P(GMV(\omega_T\ ,\ \alpha))$ ، به صورت زیر خواهد بود :

(۶)

$$\begin{aligned}
&P(2): \underset{u}{Max} \quad E[S_T] - \omega_T Var(S_T) \\
&\text{Subject to:} \\
&\qquad x_{t+1} = r_t^{\circ} x_t + r_t^1 u_t \qquad (t = 0,1,..., T-1) \\
&\qquad l_{t+1} = q_t . l_t \qquad (t = 0,1,..., T-1) \\
&\qquad Var(S_t) \le \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2 \qquad (t = 1,2,..., T-1)
\end{aligned}$$

---

1. Generalized Mean-Variance Model

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

درمدل بالا پارامترهای ω_T و $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{T-1})' \in R_+^{T-1}$ منعکس کننده نگرش سرمایه‌گذار نسبت به ریسک می باشند و بایستی قبل از جستجو برای استراتژی سبد اوراق بهادار پویای بهینه مشخص شده باشد.

۳-۲. حل مدل تعمیم یافته

برای حل مدل میانگین- واریانس تعمیم یافته، ابتدا از رویکرد دوگان لاگرانژین پیشنهاد می‌شود. فرض رویکرد دوگان، این است که حل غیر مستقیم مساله اولیه توسط حل مساله ثانویه صورت می گیرد. برای حل مساله ثانویه ابتدا نیاز به حل مساله لاگرانژین P(LMV(ω, ω_T , α)) داریم که در زیر فرمول مساله لاگرانژین آورده شده است:

(۷)

$$P(3)\ \underset{u}{Max} \qquad E[S_T] - \omega_T Var(S_T) - \sum_{t=1}^{T-1} \omega_t [\ Var(S_t) - \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2\ ]$$

Subject to:

$$x_{t+1} = r_t^0 x_t + r_t^1 u_t \qquad (t = 0,1,\ldots,T-1)$$

$$l_{t+1} = q_t . l_t \qquad (t = 0,1,\ldots,T-1)$$

در مدل بالا $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{T-1})'$، ضرایب غیر منفی لاگرانژین می باشند.

رویکرد برنامه ریزی پویا را نمی توان به طور مستقیم برای مساله لاگرانژین استفاده کرد زیرا جمله های مسئله بالا برای برنامه‌ریزی پویا، قابل تفکیک نیست. یعنی $Var(S_t)$ شامل تابع غیر خطی از $E[S_t]$ است:

$$Var(S_t) = E(S_t^2) - E^2(S_t) \qquad (۸)$$

از اینرو به وسیله تکنیک محاط کردن[1] یک مساله کمکی P(A(λ, ω, ω_T))، برای مساله لاگرانژین به صورت زیر خواهیم داشت:

1. Embedding Technique

(۹)

$$P(4):\underset{u}{Max}\ \mathrm{E}\ \Big[\sum_{t=1}^{T}\ \big(\ \lambda_t S_t - \omega_T\ (S_t)^2\ \big)\Big]$$

$$Subject \quad to:$$

$$x_{t+1} = r_t^0 x_t + r_t^1 u_t \qquad (t = 0,1,...,T-1)$$

$$l_{t+1} = q_t . l_t \qquad (t = 0,1,...,T-1)$$

در مدل بالا بردار $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_T)'$، برداری از پارامتر های کمکی است.

اگر ω_T برای $t \in \{1,2,...,T-1\}$ ، برابر صفر باشد آنگاه λ_t هم برابر صفر خواهد بود

.فرض در مباحث گفته شده بدین صورت است که $\omega_1, \omega_2,..., \omega_{T-1} \geq 0$ می باشد.

۳-۳. حل مسأله کمکی

برای حل مسأله کمکی (($P(A(\lambda, \omega, \omega_T$ به نمادسازی زیر نیاز داریم:

(۱۰)

$$Z_t = \begin{pmatrix} x_t \\ l_t \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_t = \begin{pmatrix} r_t^0 & 0 \\ 0 & q_t \end{pmatrix}, \qquad A_t = \begin{pmatrix} r_t^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

با توجه ماتریس‌های تعریف شده، مسأله کمکی (($P(A(\lambda, \omega, \omega_T$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

(۱۱)

$$P(5):\underset{u}{Max} \quad E\left[\sum_{t=1}^{T}\ (\lambda_t e' Z_t - \omega_t Z_t' e e' Z_t)\right]$$

$$Subject \quad to:$$

$$Z_{t+1} = B_t Z_t + A_t e_1 u_t \qquad (t = 0,1,...,T-1)$$

حل مسأله فوق با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویا در قالب قضیه زیر به اختصار در قالب قضیه زیر بیان شده است(بازارا و شتی، ۱۹۷۶).

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]
[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

قضیه ۱) استراتژی بهینه برای مساله کمکی $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$ به صورت زیر می باشد:

$$u_t^*(\lambda,\omega)=\frac{1}{2}\frac{E[e_1'A_t'F_{t+1}]}{E[e_1'A_t'\overline{D}_{t+1}\overline{D}_{t+1}'A_te_1]}-\frac{E[e_1'A_t'\overline{D}_{t+1}\overline{D}_{t+1}'B_tZ_t]}{E[e_1'A_t'\overline{D}_{t+1}\overline{D}_{t+1}'A_te_1]}\ ;(t= 0, 1\dots T\text{-}1) \quad (۱۲)$$

$$\overline{D}_t=\left(\omega_T^{\frac{1}{2}}\overline{B}_t^{T-t-1}e,\dots,\omega_S^{\frac{1}{2}}\overline{B}_t^{s-t-1}e,\dots,\omega_{t+1}^{\frac{1}{2}}\overline{B}_t^{\circ}e,\omega_t^{\frac{1}{2}}e\right),\ (t= 0, 1\dots T\text{-}1) \quad (۱۳)$$

$$F_t=\begin{pmatrix}+\sum_{S=t+1}^{T}\overline{r}_t^{s-t-1}\lambda_s+\lambda_t\\ -\sum_{s=t+1}^{T}\overline{q}_t^{s-t-1}\lambda_s-\lambda_t\end{pmatrix},\ \overline{B}_t^{\circ}=\begin{pmatrix}\overline{r}_t^0 & 0\\ 0 & \overline{q}_t^0\end{pmatrix},\ \overline{B}_t^i=\begin{pmatrix}\overline{r}_t^i & 0\\ 0 & \overline{q}_t^i\end{pmatrix}\ (t= 0, 1\dots T\text{-}1) \quad (۱۴)$$

$; (t= 0, 1\dots T\text{-}1)$ (۱۵)

$$\overline{r}_t^{\circ}=r_t^{\circ}-r_t^1\frac{E[r_t'r_t^{\circ}]}{E[(r_t')^2]}\ ,\ \overline{r}_t^i=r_t^{\circ}\overline{r}_{t+1}^{i-1}-r_t^1\overline{r}_{t+1}^{i-1}\frac{E[r_t^1r_t^{\circ}]}{E[(r_t^1)^2]}\ ,$$

$; (t= 0, 1\dots T\text{-}1)$ (۱۶)

$$\overline{q}_t^{\circ}=q_t-r_t^1\frac{E[r_t^1q_t]}{E[(r_t^1)^2]}\frac{E\left[\sum_{S=t+2}^{T}\overline{r}_{t+1}^{s-t-2}\ \overline{q}_{t+1}^{s-t-2}\omega_S+\omega_{t+1}\right]}{E\left[\sum_{S=t+2}^{T}\left(\overline{r}_{t+1}^{s-t-2}\right)^2\omega_S+\omega_{t+1}\right]},$$

$(t= 0, 1\dots T\text{-}1);$ (۱۷)

$$\overline{q}_t^i=q_t\overline{q}_{t+1}^{i-1}-r_t^1\ \overline{r}_{t+1}^{i-1}\frac{E[r_t^1q_t]}{E[(r_t^1)^2]}\frac{E\left[\sum_{S=t+2}^{T}\overline{r}_{t+1}^{s-t-2}\ \overline{q}_{t+1}^{s-t-2}\omega_s+\omega_{t+1}\right]}{E\left[\sum_{s=t+2}^{T}\left(\overline{r}_{t+1}^{s-t-2}\right)^2\omega_s+\omega_{t+1}\right]},$$

برای $i=1,\dots,T-t-1$ و اگر $s>t$ باشد روابط زیر قابل تعریف است:

$$\sum_{j=s}^{t}(0)_j=0 \qquad \text{و} \qquad \prod_{j=s}^{t}(0)_j=1$$

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

برای مشاهده اثبات این قضیه به (بازارا و شتی، ۱۹۷۶) مراجعه شود.

۳-٤. رابطه بین مساله لاگرانژین و مساله کمکی

برای بیان رابطه بین مساله لاگرانژین $P(LMV(\omega, \omega_T, \alpha))$ و مساله کمکی $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$ به قضیه زیر نیاز است (لی،۲۰۱۲ و ژو، ۲۰۰۴)

قضیه ۲) رابطه مساله لاگرانژین $P(LMV(\omega, \omega_T, \alpha))$ و مساله کمکی $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$ به صورت زیر می باشد:

الف) اگر $u^*(\omega) \in \Phi_L(\omega, \omega_T, \alpha)$ باشد، آنگاه $u^*(\omega) \in \Phi_A(\lambda^*, \omega, \omega_T)$ می‌باشد. در جائیکه $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_T^*)$ و داریم:

$$\lambda_t^* = -2\omega_t\alpha_t b_t + 2\omega_t(1+\alpha_t)E[S_t]|_{u^*(\omega)} \qquad (t = 1,2,...,T-1) \quad (۱۸)$$

$$\lambda_T^* = 1 + 2\omega_T E[S_T]|_{u^*(\omega)} \quad (۱۹)$$

ب) با فرض اینکه داشته باشیم $u^*(\lambda^*, \omega) \in \Phi_A(\lambda^*, \omega, \omega_T)$، شرط ضروری برای $u^*(\lambda^*, \omega) \in \Phi_L(\omega, \omega_T, \alpha)$، این است که:

$$\lambda_t^* = -2\omega_t\alpha_t b_t + 2\omega_t(1+\alpha_t)E[S_t]|_{u^*(\lambda^*, \omega)} \qquad (t = 1,2,...,T-1) \quad (۲۰)$$

$$\lambda_T^* = 1 + 2\omega_T E[S_T]|_{u^*(\lambda^*, \omega)} \quad (۲۱)$$

برای مشاهده اثبات این قضیه به پیوست (بازارا و شتی، ۱۹۷۶) مراجعه شود.

اگر کنترل ورشکستگی را در نظر نگیریم، بردار افزاینده لاگرانژ $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{T-1})$ برابر صفر می باشد. با جایگزین کردن در روابط (۱۴) و (۱۵)، یک λ مناسب که قادر می سازد از حل مساله کمکی $P(A(\lambda, \omega, \omega_T))$ به حل بهینه از مساله لاگرانژین $P(L(\omega, \omega_T, \alpha))$ برسیم، به عنوان یک نتیجه یک استراتژی بهینه از مدیریت دارایی و بدهی بدون کنترل ورشکستگی به وسیله جانشین کردن λ, ω در رابطه (۱) بدست می آید. در این مورد مسائل

$P(L(\omega, \omega_T, \alpha)), P(GMV(\omega_T)), P(MV(\omega_T))$ یکسان هستند.

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

۳-۵. حل مساله لاگرانژین

در این قسمت، ما به حل مساله لاگرانژین $P(L(\omega,\omega_T,\alpha))$، بعد از پیدا کردن رابطه بین مساله لاگرانژین و مساله کمکی، خواهیم پرداخت. طبق قضیه ۲، داریم:

$$\Phi_L(\omega,\omega_T,\alpha)\subseteq U_\lambda \Phi_A(\lambda,\omega,\omega_T) \tag{۲۲}$$

طبق قضیه ۱، یک راه حل بهینه از مساله کمکی $P(A(\lambda,\omega,\omega_T))$، برای هر λ، ارائه شده است. تنها نیازما پیدا کردن برآورد λ که بتواند حل بهینه از مساله کمکی را به ما بدهد که به دنبال آن به حل مساله لاگرانژین برسیم.

اگر ماتریسی به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\Psi = diag\,[2\omega_1(1+\alpha_1),...,2\omega_{T-1}(1+\alpha_{T-1}),2\omega_T] \tag{۲۳}$$

تابع diag برای ساختن یک ماتریس قطری استفاده می شود. یعنی اعضای ماتریسی که به عنوان ورودی به آن داده شده است را روی قطر اصلی ماتریس خروجی گذاشته و بقیه اعضا را مساوی صفر می گذارد.

به واسطه روابط (۱۴) وقضیه ۲ و با شرط وارون‌پذیری Ψ، داریم:

$$(\Lambda-\Psi^{-1})\begin{pmatrix}\lambda_1^*\\ \vdots\\ \lambda_{T-1}^*\\ \lambda_T^*\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}E\left[e'\overline{B}_\circ^\circ Z_\circ\right]\\ \vdots\\ E\left[e'\overline{B}_\circ^{T-1} Z_\circ\right]\end{pmatrix} - \Psi^{-1}\begin{pmatrix}-2\omega_1\alpha_1 b_1\\ \vdots\\ -2\omega_{T-1}\alpha_{T-1}b_{T-1}\\ 1\end{pmatrix} \tag{۲۴}$$

بنابراین ما به λ^* نیاز داریم که می توان توسط راهنمای زیر λ^* رابدست آوریم:

راه اول) اگر ماتریس $(\Lambda-\Psi^{-1})$، غیر منفرد[1] باشد، λ^* را می توان توسط حل سیستم معادلات خطی رابطه (۱۸) بدست آورد (ماتریس غیر منفرد، ماتریس مربعی می باشد که دترمینان آن صفر نباشد و ماتریس معکوس پذیر باشد).

1. Nonsingular

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

راه دوم) اگر ماتریس $(\Lambda-\Psi^{-1})$ ، منفرد[1] باشد، λ^* را می توان توسط حل مساله زیر بدست آورد: (ماتریس منفرد، ماتریس مربعی می باشد که دترمینان آن صفر باشد و ماتریس معکوس پذیر نباشد).

$$P(6): \underset{\lambda}{Max}\left\{E[S_T]-\omega_T Var(S_T)-\sum_{t=1}^{T-1}\omega_T\left[Var(S_T)-\alpha_t(E[S_T]-b_t)^2\right]\right\}\Big|_{u^*} \quad (۲۵)$$

Subject to:

$$\lambda \qquad satisfies$$

جائیکه $u^*=u^*(\lambda,\omega)\in\Phi_A(\lambda,\omega,\omega_T)$ و تابع هدف، سطحی از تابع هدف مساله لاگرانژ $P(L(\omega,\omega_T,\alpha))$ تحت استراتژی $u^*(\lambda,\omega)$ است. به طور خاص داریم:

اگر رتبه ماتریس $(\Lambda-\Psi^{-1})$ برابر $T-1$ باشد یعنی $Rank(\Lambda-\Psi^{-1})=T-1$ باشد می توان λ^* بهینه را توسط روش جستجوی خطی محاسبه کرد.

اگر رتبه ماتریس $(\Lambda-\Psi^{-1})$ کمتر از $T-1$ باشد یعنی $Rank(\Lambda-\Psi^{-1})<T-1$ باشد می توان λ^* بهینه را توسط روش افزاینده لاگرانژین[2] محاسبه کرد. بعد از اینکه λ^* را بدست آوردیم، آن را در رابطه (۱) جایگزین می کنیم و نتیجه، استراتژی بهینه برای مساله لاگرانژین $P(L(\omega,\omega_T,\alpha))$ می باشد.

۳-۶. حل مدل میانگین- واریانس تعمیم یافته

در نهایت در این قسمت به حل مدل میانگین - واریانس تعمم یافته $P(GMV(\omega_T,\alpha))$ می پردازیم. از آنجا که $P(L(\omega,\omega_T,\alpha))$، مساله لاگرانژین از $P(GMV(\omega_T,\alpha))$ است و حل مساله $P(L(\omega,\omega_T,\alpha))$ را داریم، تنها کار باقی مانده جستجو برای بردار افزاینده لاگرانژین[3] مناسب که حل بهینه از مساله اولیه $P(GMV(\omega_T,\alpha))$ می توان توسط حل بهینه از مساله لاگرانژین $P(L(\omega,\omega_T,\alpha))$ بدست آورد.

---

1. Singular
2. Lagrangian Multiplier Method
3. Lagrangian Multiplier Vector

روش اولیه – ثانویه بـرای حـل مسـاله پیشـنهاد مـی‌شـود. مسـاله ثانویـه لاگرانـژین $P(LD(\omega_T,\alpha))$ به صورت زیر است:

$$P(\text{۷}): \underset{W\geq \text{۰}}{Min} H(\omega) = \underset{u}{Max} \quad E[S_T] - \omega_T Var(S_T) - \sum_{t=}^{T-1} \omega_t \left[Var(S_t) - \alpha_t (E[S_t] - b_t)^{\text{۲}} \right] \qquad (\text{۲۶})$$

در بالا، تابع ثانویه $\mathrm{H}(\omega)$ برابر است با حداکثر کـردن سـطحی از $P(L(\omega,\omega_T,\alpha))$ برای بدست آوردن ω ، و یک تابع محدب می باشد.

با روش اولیه – ثانویه، حل غیر مستقیم مساله اولیـه $P(GMV(\omega_T,\alpha))$ را توسـط حـل مساله ثانویه $P(LD(\omega_T,\alpha))$ انجام می دهیم. وقتی $\omega = \overline{\omega}$ است ، با فرض اینکه $\overline{u}(\overline{\omega})$ ، استراتژی بهینه برای $P(L(\overline{\omega},\omega_T,\alpha))$ است بـا ارائـه تعریـف زیـر بـرای تـابع g ، بـرای $t = 1,2,\ldots,T-1$ خواهیم داشت:

$$g(\overline{\omega};\overline{u}) = (g_1(\overline{\omega};\overline{u}),\ldots,g_{T-1}(\overline{\omega};\overline{u}))' \qquad (\text{۲۷})$$

$$g_t(\overline{\omega};\overline{u}) = \begin{cases} \left[Var(S_t) - \alpha_t (E[S_t] - b_t)^{\text{۲}} \right] \Big|_{\overline{u}(\overline{\omega})} & ;\ \overline{\omega}_t > \text{۰} \\ Max\left\{ \text{۰}, \left[Var(S_t) - \alpha_t (E[S_t] - b_t)^{\text{۲}} \right] \Big|_{\overline{u}(\overline{\omega})} \right\} & ;\ \overline{\omega}_t = \text{۰} \end{cases}$$

مطابق قضیه ۱-۴-۶، کتاب برنامه ریزی غیر خطی، نوشته بازاراوشتی(۱۹۷۶)، داریم:

اگـر $g(\overline{\omega};\overline{u}) \neq 0$ باشـد، آنگـاه $g(\overline{\omega};\overline{u})$ یـک مسـیر نـزول قابـل قبـول[1] از $\mathrm{H}(\omega)$ برحسـب $\overline{\omega}$ مـی باشـد و اگـر $g(\overline{\omega};\overline{u}) = 0$ باشـد، آنگـاه $\overline{\omega}$ حـل بهینـه مسـاله $P(LD(\omega_T,\alpha))$ می باشد و $\overline{u}(\overline{\omega})$ استراتژی پرتفوی بهینه از $P(GMV(\omega_T,\alpha))$ می باشد.

در آخرین مورد، به واسطه تئوری ثانویه لاگرانژین طبق قضیه ۱-۵-۶ در کتـاب برنامـه ریـزی غیـر خطـی نوشـته بازاراوشـتی(۱۹۷۶) $\overline{\Pi}(\overline{\omega})$، اسـتراتژی پرتفـوی بهینـه از مسـاله $P(GMV(\omega_T,\alpha))$ می باشد.

1. Feasible Descent Direction

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]
[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

براساس بحثهای صورت گرفته در بالا، الگوریتم تکرار شونده اولیه – ثانویه به صورت زیر می باشد:

قدم اول) نقط ابتدائی را به عنوان $\omega^{\circ} \geq \circ$، انتخاب می کنیم و همچنین عدد بسیار کوچک $\varepsilon > \circ$ را لحاظ می کنیم و k=0 قرار می دهیم.

قدم دوم) مساله کمکی $P(A(\lambda, \omega^K, \omega_T)$ را حل می کنیم تا به $u(\lambda, \omega^k)$ برسیم.

قدم سوم) مساله لاگرانژین $P(L(\omega^K, \omega_T, \alpha))$ را حل کرده تا به $u^K(\omega^K)$ که همان استراتژی بهینه است برسیم.

قدم چهارم) اگر $\left|g_t(\omega^k, u^k)\right| \leq \varepsilon$ برای $t = 1,2,...,T-1$ آنگاه به قدم ششم می رویم و اگر $| g_t(\omega^k, u^k) |> \varepsilon$ برای $t = 1,2,...,T-1$ باشد به قدم پنجم می رویم.

قدم پنجم) حل مساله بهینه سازی در قدم دوم و ω^{K+1} و قرار دادن $k = k+1$

قدم ششم) توقف کرده و $u^k(\omega^k), \omega^k$ که حل های بهینه از مساله ثانویه لاگرانژین $P(LD(\omega_T, \alpha))$ و مساله لاگرانژین $P(L(\omega^k, \omega_T, \alpha))$ هستند را استخراج می کنیم.

مساله بهینه سازی قدم دوم به صورت زیر می باشد:

$$P(8): \underset{\delta}{Min} \qquad H(\omega^k + \delta.g(\omega^K; u^K)) \tag{۲۸}$$

Subject to:

$$\omega^K + \delta.g(\omega^K; u^K) \geq 0$$
$$\delta \geq 0$$

δ^K، حل بهینه می باشد و $\omega^{k+1} = \omega^K + \delta^K g(\omega^K; u^K)$, $K = K+1$ و به قدم اول بر می گردیم.

بر اساس قسمت ۶,۴ برنامه ریزی غیر خطی بازارا و شتی(۱۹۷۶)، دو حالت رخ می دهد:

حالت اول) اگر در قدم دوم الگوریتم فوق، یک حل بهینه محدود δ^K وجود نداشت، به این نتیجه خواهیم رسید که توقف کرده و به دنبال آن مساله ثانویه نامحدود و مساله اولیه نشدنی می باشد.

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

حالت دوم) اگر در قدم دوم الگوریتم فوق، حل محدود δ^K باشد اما نتوان به هر δ منحصر به فرد دست پیدا کرد، به این نتیجه خواهیم رسید که δ^K باید عدد به اندازه کافی بزرگ بدست آید.

برای حل مساله بهینه سازی در قدم دوم، روش تابع جریمه[1] را بکار می‌گیریم. این روش را می‌توان به عنوان یک مورد خاص از تنظیم تیخونوف[2] در نظر گرفت. در واقع، با انتخاب پارامتر جریمه به اندازه کافی بزرگ، راه حل مساله جریمه را می توان کاملا نزدیک به راه حل مساله اصلی کرد(بازار و شتی، ۱۹۷۶). به طور خلاصه، رابطه بین مسائل $P(L(\omega^k,\omega_T,\alpha))$، $P(GMV(\omega_T,\alpha))$ و $P(LD(\omega_T,\alpha))$ به شکل زیر قابل بیان است.

قضیه ۳) فرض کنید که $\overline{\omega}$، حل بهینه از مساله $P(LD(\omega_T,\alpha))$ باشد و همچنین فرض کنید $\overline{u}(\overline{\omega})$، حل بهینه از مساله $P(L(\omega^k,\omega_T,\alpha))$ باشد، آنگاه $\overline{u}(\overline{\omega})$، حل بهینه از مساله $P(GMV(\omega_T,\alpha))$ خواهد بود.

۳-۷. مدل پیشنهادی توسعه یافته

همانطور که پیشتر نیز اشاره شد، هدف نهایی پژوهش، توسعه مدلی با تنوع در دارایی های ریسکی است لذا مدل تعمیم یافته پیشنهادی که تنها دارای یک دارایی ریسکی بود را توسعه داده و در حالت کلی n دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک برای مدل، در نظر گرفته می‌شود. لذا برخی از پارامترهای مدل با تغییر کمی به صورت زیر قابل تعریف است:

u_t^j = میزان سرمایه گذاری در دارایی ریسکی jام با نرخ بازگشت $\widetilde{r}_t^{\,j}$ در دوره ی t

$\widetilde{r}_t^{\,j}$= نرخ بازگشت دارایی ریسکی jام در دوره ی t

با اضافه کردن فرض جدید، محدودیت اول مدل تعمیم یافته تغییر کرده و مدل جدید بصورت زیر قابل ارائه است:

1. Penalty Function Method
2. Tikhonov Regularization

$$P(9): \underset{u}{Max} \quad E[S_T] - \omega_T Var(S_T) \qquad (۲۹)$$

Subject to:

$$x_{t+1} = r_t^{\circ} x_t + \sum_{j=1}^{n} (\tilde{r}_t^{\,j} - r_t^{\circ}) u_t^j \qquad (t = 0,1,..., T-1)$$

$$l_{t+1} = q_t . l_t \qquad (t = 0,1,...,T-1)$$

$$Var(S_t) \le \alpha_t (E[S_t] - b_t)^2 \qquad (t = 1,2,..., T-1)$$

٤. داده‌ها و نتایج تجربی

برای اجرای مدل نیاز به سه گروه داده به عنوان ورودی داریم: نرخ بازده دارایی ریسکی، نرخ بازده دارایی بدون ریسک و نرخ بهره بانکی که برای تأمین آنها از داده‌های واقعی به شرح زیر استفاده شد:

برای اجرای مدل فرض شد که $n=10$ و $T=4$ ، یعنی ۱۰ دارایی ریسکی، یک دارایی بدون ریسک و دوره‌های سرمایه گذاری نیز به صورت فصلی است. برای به دست آوردن نرخ بازده دارایی ریسکی، ۱۰ شرکت مستقر در بورس اوراق بهادار تهران، به صورت تصادفی انتخاب شدند و قیمت روزانه آنها از سال ۱۳۸۷ تا انتهای ۱۳۹۱ به مدت ۵ سال استخراج و سپس نرخ بازده فصلی آنها بصورت لگاریتمی محاسبه شد که میانگین نرخ‌های محاسبه شده در جدول شماره ۱ ارائه شده است:

جدول ۱. نرخ بازگشت دارایی ریسکی به صورت فصلی

نماد شرکت	میانگین بهار	میانگین تابستان	میانگین پائیز	میانگین زمستان
فخوز	۰/۱۵۷	۰/۱۰۸	-۰/۰۹۸	۰/۰۹۵
رمپنا	-۰/۰۰۸۶	-۰/۰۳۶۶	-۰/۰۳۵۰۶	۰/۱۰۸۴
فولاد	۰/۰۹۸۶۴	۰/۰۳۱۸	-۰/۰۲۲۴	۰/۰۶۱۸۳
کروی	۰/۰۶۰۴	۰/۱۴۶۶	-۰/۱۷۲۵	-۰/۰۳۲۳۲
وبملت	۰/۰۵	۰/۰۰۹۱۵	۰/۰۱۰۴۷۵	۰/۰۳۶
اخابر	-۰/۱۰۳۱	۰/۱۴۶	-۰/۰۴۹۱۲	۰/۰۹۳۶۸
شکربن	-۰/۰۴۹۴۸	۰/۱۳۸۸۴	-۰/۱۶۸۴	۰/۲۱۰۷۲۶
خزامیاد	-۰/۰۵۵۵۲	-۰/۰۲۵	-۰/۰۵۱۷	۰/۰۷۴۴
ولساپا	-۰/۰۳۰۲۴	۰/۱۵۳۱۲	-۰/۱۶۳	۰/۱۴۷۰۴
ونوین	۰/۰۴۲۳۸	۰/۱۳۸۰۶	-۰/۰۵۴۴۶	۰/۰۱۳۳

منبع: یافته‌های تحقیق

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]
[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

برای دارایی بدون ریسک، اوراق مشارکت، انتخاب مناسبی به نظر می‌رسید که طبق اطلاعات منتشر شده بانک مرکزی نرخ اوراق مشارکت ۲۰٪ سالیانه در نظر گرفته شده است که نرخ اسمی فصلی آن ۵٪ خواهد بود بنابراین:

$$r_0^0 = r_1^0 = r_2^0 = r_3^0 = 0.05 \qquad (۳۰)$$

و نهایتاً برای نرخ بهره وام بانکی، به طور متوسط نرخ بهره سالیانه ۲۴٪ در نظر گرفته شد که نرخ فصلی آن ۶٪ خواهد بود:

$$q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0.06 \qquad (۳۱)$$

سایر پارامترهای مورد نیاز هم بصورت فرضی زیر درنظر گرفته شد:

$$\omega_T = 0.2 \quad ; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1 \quad ; \quad b_1 = b_2 = b_3 = 0 \qquad (۳۲)$$

$x_0 = 10000 \; ; \; l_0 = 1000$

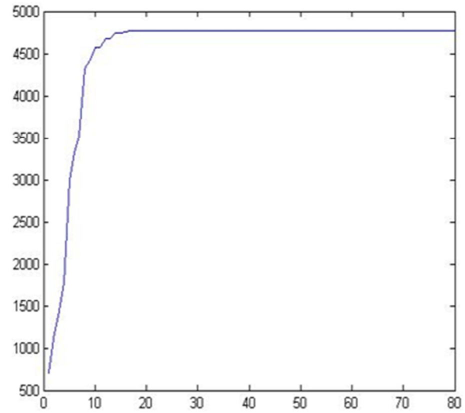
الگوریتیم ژنتیک برای رسیدن به نتایج عددی مدل پیشنهاد شده است که این انتخاب به دلیل درجه پیچیدگی مدل پیشنهادی است و محیط *MATLAB* برای کد کردن این الگوریتم گزینه مناسبی بود. خروجی مدل درواقع، میزان سرمایه گذاری در دارایی ریسکی j ام می باشد که در جدول شماره۲ نمایش داده می شود. به دنبال آن مقدار تابع هدف در تکرار های متوالی و در نهایت نمودار همگرایی تابع هدف را نشان می دهیم.

جدول ۲. میزان سرمایه گذاری در دارایی ریسکی j ام با نرخ بازگشت $\tilde{r}_t^j$ در زمان t (u_t^j)

نماد شرکت	t=1	t= 2	t= 3	t= 4
فخوز	۶۳۷	۶۱۶	۵۵۴	۶۲۱
رمپنا	۶۵۱	۵۹۷	۵۰۶	۶۷۶
فولاد	۶۳۳	۵۴۸	۵۹۷	۵۳۸
کروی	۶۲۳	۷۴۱	۶۵۲	۵۳۲
وبملت	۶۵۵	۶۲۲	۶۳۸	۶۲۹
اخابر	۵۹۷	۶۳۷	۵۶۵	۵۷۸
شکربن	۵۳۹	۶۵۱	۶۷۵	۵۵۸
خزامیاد	۵۸۸	۶۰۴	۵۳۷	۵۱۴
ولساپا	۵۸۸	۶۰۰	۵۷۶	۶۸۲
ونوین	۶۶۰	۶۹۴	۵۶۱	۵۸۵

منبع: یافته‌های تحقیق

همانطور که در شکل نمودار ۱ نشان داده شده، الگوریتم ژنتیک در طول ۸۰ تکرار به اجرا درآمده که در مقدار تابع هدف ۴۷۷۵,۲۳ به همگرایی مطلوب رسیده است.



نمودار ۱. همگرایی الگوریتم ژنتیک در طول تکرارهای حل

منبع: یافته‌های تحقیق

به منظور بررسی کنترل ورشکستگی، از تکنیک شبیه‌سازی مونت کارلو[1] استفاده شده است. فرآیند شبیه‌سازی شامل مراحل مشخصی است که بطور خلاصه می‌توان به چهار گام اساسی زیر اشاره کرد: ۱- یک مدل برای متغیرهای تصادفی مورد نظر انتخاب می‌شود و سپس پارامترهای آن مانند نوسان‌پذیری، همبستگی و نظایر آن بر اساس داده‌های تاریخی یا اطلاعات در دسترس بازار تخمین زده می‌شوند. ۲- مسیرهای شبیه‌سازی شده یا ساختگی برای متغیرهای تصادفی ساخته می‌شوند. ۳- برای اطمینان از اینکه توزیع بازده شبیه‌سازی شده پرتفوی، به اندازه کافی به توزیع واقعی آن نزدیک است، فرآیندهای شبیه‌سازی شده به تعداد کافی تکرار خواهند شد. ۴- تحلیل نتایج بدست آمده.

در این مقاله، برای بررسی کنترل ورشکستگی، شبیه‌سازی مونت کارلو با *SN=10000* (تعداد نمونه) اجرا شد. نتایج آن در جدول ۳ ارائه شده است.

1. Mont Carlo Simulation

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]
[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

جدول ۳. تناوب ورشکستگی مربوط به MV و GMV

دوره	BN^M_t	$P^M(BF_t)$	BN^G_t	$P^G(BF_t)$
۱	۳۶۷۱	۰/۳۶۷۱	۲۲۳۰	۰/۲۲۳۰
۲	۲۸۴۵	۰/۲۸۴۵	۴۲۲	۰/۰۴۲۲
۳	۸۸۶۳	۰/۸۸۶۳	۵۵۷۷	۰/۵۵۷۷
۴	۸۱۸۶	۰/۸۱۸۶	۵۳۲۰	۰/۵۳۲۰

منبع: یافته‌های تحقیق

BN^M_t و BN^G_t = تعداد ورشکست شدن سرمایه‌گذار در دوره t در شبیه‌سازی برای $P(MV(w_T))$ و $P(GMV(w_T, \alpha))$

$P^M(BF_t)= BN^M_t / SN$ = تخمینی از فرکانس ورشکستگی برای $P(MV(w_T))$

$P^G(BF_t)= BN^G_t / SN$ = تخمینی از فرکانس ورشکستگی برای $P(GMV(w_T, \alpha))$

همانظور که در جدول شماره ۱ مشاهده می‌شود، تعداد ورشکست شدن در تمام دوره‌ها، برای مدل میانگین-واریانس تعمیم یافته به مراتب کمتر از مدل میانگین-واریانس است و این امر نشان‌دهنده تأثیر کنترل ورشکستگی بر استراتژی بهینه می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل میانگین – واریانس تعمیم یافته برای مدیریت دارایی و بدهی چند دوره ای همراه با کنترل ورشکستگی روی دوره های متوسط ارائه شد. با اینکه یک مدل پیچیده بود اما یک راه حل برای آن ارائه گردید. نمای کلی روش حل به این ترتیب است: الف) ایجاد کردن مساله لاگرانژین و مساله دوگانه لاگرانژین و مساله کمکی از مساله لاگرانژین. ب) برای بدست آوردن ضریب افزاینده لاگرانژین u، مساله کمکی برای هر پارامتر کمکی λ، به وسیله ی رویکرد برنامه ریزی پویا بدست می آید. ج) پارامتر کمکی λ، را به وسیله استفاده از روش ذکر شده در بخش ۳-۵ بدست آورده می شود و پس از آن یک حل بهینه u از مساله لاگرانژین صورت می پذیرد. د) تشخیص دادن اینکه

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

(ω,u) حل های مساله دوگانه لاگرانژین می باشد و پس از آن تصمیم گرفته شود که ادامه داده شود یا توقف شود. زمانی که الگوریتم توقف می‌کند، u حل بهینه از مدل میانگین –واریانس تعمیم یافته ابتدایی می باشد. در مدل میانگین –واریانس تعمیم یافته از نامساوی چبی‌شف برای جانشین کردن کنترل ورشکستگی اصلی استفاده می شود. اضافه کردن این محدودیت به مدل، نشان دهنده این است که سرمایه گذار مربوطه بیش از حد محافظه کار می باشد. با در نظر گرفتن محدودیت کنترل ورشکستگی در مدل مورد بررسی و با توجه به نتایج مثال عددی موجود دربخش چهارم، نشان داده می‌شود که کنترل ورشکستگی اثر پر معنایی روی استراتژی بهینه می گذارد به عبارت دیگر هنگامی که محدودیت کنترل ورشکستگی را در نظر می گیریم نسبت به زمانی که در نظر نمی گیریم بر روی استراتژی بهینه این تاثیر را دارد که تعداد دفعات رسیدن به ورشکستگی به مراتب کمتر می شود.

در پایان پیشنهاداتی جهت توسعه‌های آتی این پژوهش ارائه میگردد که عبارتند از: توسعه مدل ارائه شده به صورت زمان پیوسته[1] در جهت افزایش کارایی مدل و در راستای مقابله با عدم قطعیت ذاتی موجود در مسائل مدیریت سبد اوراق بهادار، توصیه میشود به جای در نظر گرفتن پارامترهای قطعی برای نرخ‌ها از رویکردهای دیگری نظیر تئوری فازی در برنامه‌ریزی، برنامه‌ریزی استوار[2] یا برنامه ریزی تصادفی استفاده شود.

1. Continuous-Time Model
2. Robust Optimization

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]

منابع و مآخذ

- Bazaraa, M.S., Shetty, C.M., (1976), Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, Wiley, Now York.
- Bielecki, T.R., Jin, H., Pliska, S.R., Zhou, X.Y., (2005), Continuous-time mean–variance portfolio selection with bankruptcy prohibition, *Math. Finance,* 15, 213–244.
- Chen, P., Yang, H.L., (2011), Markowitz's mean–variance asset–liability management with regime switching: a multi-period model, *Appl. Math. Finance*, 18, 29–50.
- Chiu, M.C., Li, D., (2006), Asset and liability management under a continuous-time mean–variance optimization framework, *Insur. Math. Econ*., 39, 330–355.
- Jones, T.L., Brown, J., (2009), Integrating asset–liability risk management with portfolio optimization for individual investors, *J. Wealth Manage*, 12, 51–60.
- Leippold, M.,Trojani, F., Vanini,P., (2002), Multiperiod Asset-Liability Management in a Mean-Variance Framework with Exogenous and Endogenous Liabilities, *University of Southern Switzerland, Lugano.*
- Leippold, M., F. Trojani, and P. Vanini, (2004), A geometric approach to multi-period meanvariance optimization of assets and liabilities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 1079-1113
- Li, D., Ng, W.L., (2000), Optimal dynamic portfolio selection: multi period mean–variance formulation, *Math. Finance*, 10, 387–406.
- Li, Ch., Li, Zh., (2012), Multi-period portfolio optimization for asset–liability management with bankrupt control, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 11196–11208.
- Markowitz, H., (1952), Portfolio selection, *Journal of Finance*, 7, 77–91.
- Markowitz, H., (1956), The optimization of a quadratic function subject to linear constraint, *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, 111–133,
- Markowitz, H., (1959), Portfolio selection: Efficient diversification of investments, *New York: Wiley*.
- Sadjadi, S. j., Seyedhosseini, S. M., Hassanlou, Kh., (2011), Fuzzy multi period portfolio selection with different rates for borrowing and lending, *Applied Soft Computing,* 11, 3821–3826.
- Seyedhosseini, S. M., Sadjadi, S. j., Hassanlou, Kh., (2010), New approach for multiperiod portfolio optimization with different rates for borrowing and lending, *Journal of Academy of Business and Economics,* 10.
- Seyedhosseini, S. M., Sadjadi, S. j., Hassanlou, Kh., (2010), Multiperiod portfolio selection with different rates for borrowing and lending in

presence of transaction costs, *International Journal of Industrial Engineering& Production research*, 21, 45-51.

- Seyedhosseini, S. M., Hassanlou, Kh., Rahi, M., (2011), A Stochastic Programming Model for Multiperiod Portfolio Selection with New Constraints, *Journal of Academy of Business and Economics*, 11,224 - 230.
- Xie, S.X., (2009), Continuous-time mean–variance portfolio selection with liability and regime switching, *Insur. Math. Econ*., 45, 943–953.
- Yi, L., Li, Z.F., Li, D., (2008), Multi-period portfolio selection for asset–liability management with uncertain investment horizon, *J. Ind. Manage*. Optim, 4, 535–552.
- Zhang, L., Li, Z., (2012), Multi-Period Mean-Variance Portfolio Selection with Uncertain Time Horizon When Returns Are Serially Correlated, *Mathematical Problems in Engineering*.
- Zhou,X.Y., Li,D., (2000), Continuous-time mean–variance portfolio selection: a stochastic LQ framework, *Appl. Math*. *Opt*., 42, 19–33.
- Zhu, S.S., Li, D., Wang, S.Y., (2004), Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: a generalized mean–variance formulation, *IEEE Trans. Autom. Control*, 49, 447–457.

[DOR: 20.1001.1.22286454.1396.7.27.1.3]

[DOI: 10.29252/jemr.7.27.207]