

## مدل سازی مسائل آب زیرزمینی با صفحه گسترده

محمد نخعی

گروه زمین شناسی دانشگاه تربیت معلم

تاریخ: دریافت ۸۱/۴/۱۵ پذیرش: ۸۲/۲/۱۰

### چکیده

صفحه گسترده، ابزاری کاربردی برای حل مسائل جریان پایدار محبوس آب زیرزمینی است. روش کار بسیار ساده است، اما در عین حال بسیاری از شرایط جریان شامل نایکسانی، ناهمگنی، وجود منابع تخلیه و تغذیه و اشکال هندسی پیچیده را در بر می گیرد. به علاوه، چون معادلات صفحه گسترده به صورت دستی برنامه نویسی می شوند کاربر درک فیزیکی بسیار خوبی از مسأله خواهد داشت، معادلات حاکم برای شرایط جریان ناهمگن و نایکسان ایجاد می شوند. فرموله کردن ریاضی شرایط مرزی و در نظر گرفتن تخلیه و تغذیه در مدل سازی صفحه گسترده ارائه شده و حساسیت حل به انتخاب فواصل نقاط شبکه بندی شده و دقت جواب بررسی گردیده است. در پایان مزایا و محدودیتهای این روش در مقایسه با مدل های عددی دیگر مقایسه گردیده است.

### مقدمه

شبکه جریان، که از مجموعه ای از خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل ساخته شده، حلی ترسیمی از جریان پایدار آب زیرزمینی است. آبشناسان، در حال حاضر، روشهای متعددی برای ساختن شبکه جریان در دست دارند. شبکه جریان را می توان با روشهای دستی یا با حل دقیق به روش تحلیلی و یا به روشهای عددی ترسیم کرد. اگرچه حل ترسیمی شبکه جریان به روش دستی برای درک مطلب، ابزار آموزشی بسیار مناسبی است، ولی روش وقت گیری است و کاربرد آن در شرایط زمین ناهمگن به دقت و تجربه کافی نیاز دارد. راه حل های تحلیلی برای بسیاری از مسائل آب زیر زمینی به وسیله هار [۵] ۱۹۶۲ برای شرایط محدود در محیط متخلخل همگن و همسان با شرایط مرزی ساده ارائه شده است. روشهای مدل سازی عددی برای حل

کلمات کلیدی: آبهای زیرزمینی، نشست، هدایت هیدرولیکی، مدل سازی عددی، صفحه گسترده

مسائل آب زیرزمینی در شرایط ناهمگن و ناهمسان با شرایط مرزی پیچیده به کار می‌روند و بسیار قابل اطمینان هستند و به سرمایه، وقت زیاد و نیروی متخصص نیاز دارد. بنابراین مزایای این روشهای عددی سبب شده است که مدلهای از قبل نوشته و تهیه شده به صورت تجاری در اختیار کاربرها قرار گیرد.

نرم افزارهای صفحه گسترده متعددی برای کامپیوترهای شخصی در دسترس است که می‌توان از آنها برای بسیاری از مسائل مهندسی استفاده کرد. کتاب «ولف ۱۹۹۵» [۱۱] نیز برای مشاهده مثالهای متنوع مرجع مناسبی از مسائل مهندسی با صفحه گسترده است. بعلاوه مسائل آب زیرزمینی را می‌توان به کمک نرم افزارهای صفحه گسترده نظیر اکسل حل کرد و اگر جواب بسیار دقیق مورد نیاز نباشد، این روش جانشینی مناسب به جای روشهای پیشرفته مدل‌سازی عددی است. گاهی اوقات آب‌شناس در مراحل ابتدایی طراحی پروژه خود از روش صفحه گسترده استفاده می‌کند و بعد از شناخت مفاهیم اصلی مسأله از مدل عددی تجاری برای به دست آوردن حل دقیق کمک می‌گیرد که این کار سبب صرفه جویی در وقت و هزینه خواهد شد.

هدف این مقاله ارائه روشهای عمومی حل مسائل جریان پایدار و محبوس با استفاده از صفحه گسترده است. روش کار بسیار ساده است و می‌توان آن را برای حل مسائل آب زیرزمینی در آبخوان ناهمگن، ناهمسان، با وجود چاه پمپاژ و شکلهای هندسی پیچیده نیز به کار برد. معمولاً چون معادلات صفحه گسترده با دست برنامه نویسی می‌شوند، استفاده کننده از صفحه گسترده درک عمیقی از فیزیک مسأله به دست می‌آورد. معادلات حاکم برای شرایط کلی جریان ایجاد می‌شوند و شامل رفتار مرزها نیز هست. کاربرد روش با حل سه مثال در این مقاله شرح داده می‌شود. چگونگی حساسیت حل در این روش به انتخاب فواصل گره‌ها و انتخاب دقت جواب نهایی، آزمایش خواهد شد. در پایان نیز علاوه بر بحث در باره مزایا و محدودیتهای روش، با روشهای حل عددی دیگر مقایسه می‌شود.

### ایجاد معادلات صفحه گسترده

معادله عمومی توصیف کننده جریان پایدار مایعات در محیط متخلخل در شرایط دو بعدی،

ناهمگن و نایکسان با رابطه دیفرانسیل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial h}{\partial z}) = 0 \quad (1)$$

در این معادله [معادله (۱)]  $K_x$  و  $K_z$  به ترتیب ضرایب هدایت هیدرولیکی در جهات  $X$  و  $Z$ ، و  $h$  بار آبی کلی را نشان می‌دهند. فرض بر این است که جهات اصلی هدایت هیدرولیکی هم جهت با جهات سیستم مختصات است و قانون دارسی معتبر است. این معادله معمولاً با روشهای حل عددی نظیر تفاضلهای محدود و اجزاء محدود حل می‌شود. در هر دو روش عددی، دامنه حل توسط مجموعه‌ای از چند گره یا نود به دامنه‌های کوچکتر تقسیم می‌گردد و معادله دیفرانسیل حاکم به معادلات جبری مربوط به نودها تبدیل می‌شود. برای هر گره یا نود معادله‌ای بر حسب مجهول  $h$  نوشته می‌شود و در نتیجه یک مجموعه سیستم معادلاتی به تعداد  $N$  معادله خطی که مربوط به  $N$  مجهول است به دست می‌آید. با حل این سیستم معادلات  $N$  تایی به روشهای مستقیم و تکرار  $N$  مجهول به دست خواهند آمد.

برای اطلاعات بیشتر در باره این روشها به مراجعی نظیر «وانگ و اندرسون ۱۹۸۲» [۸]، «دسای ۱۹۷۷» [۳] و «بیر و وروئیت ۱۹۸۷» [۲] مراجعه شود.

بر اساس مقاله «ویلیامز و همکاران ۱۹۹۳» [۱۰]، صفحه گسترده کامپیوتری نیز برای حل مسایل آب زیرزمینی با ایجاد الگویی از روش تفاضلهای محدود به کار می‌رود. روش حل با صفحه گسترده که در اینجا شرح داده می‌شود، بیشتر به روش ارائه شده به وسیله «فریز و چری ۱۹۷۹» [۴] مرتبط و نزدیک است. در این روش دامنه مسأله با استفاده از تعدادی گره به چندین سلول تقسیم می‌شود. چون حل بر روی یک صفحه گسترده انجام می‌گیرد، لزوماً سلولها باید به شکل بلوکهای مستطیلی باشند. رابطه بارآبی کلی در هر بلوک داخلی با استفاده از اصل بقای جرم و جمع جبری جریان ورودی از بلوکهای مجاور به دست آمده است. بنابراین بارآبی نشان داده شده در هر سلول صفحه گسترده، منطبق بر مرکز آن سلول است. سپس معادلات صفحه گسترده با تکرار محاسبات در صفحه گسترده به صورت دستی که روش آن در انتهای مقاله در بخش «روش حل با صفحه گسترده» شرح داده شده است، تا رسیدن به دقت مورد نیاز تکرار می‌گردد. در اینجا تعداد تکرار به دقت مورد نیاز انتخاب شده، یعنی اختلاف

بارآبی میان تکرارهای متوالی بستگی دارد. از این پس روش ایجاد معادلات مربوط به بلوکهای داخلی، بلوکهای مجاور انواع مرزهای بار ثابت و نفوذ ناپذیر و چاه پمپاژ شرح داده می شود.

### معادله بلوکهای داخلی دور از مرزها

شکل (۱) روش ایجاد معادله بار آبی کلی را در بلوکهای داخلی که از مرزها دورند با استفاده از اصل بقای جرم برای شرایط جریان دو بعدی، همگن و یکسان نشان می دهد. مقطع کوچکی از دامنه گره بندی شده با طول  $\Delta x$  در جهت افقی و  $\Delta z$  در جهت عمودی نشان داده شده است. هر بلوک از دامنه جریان در شرایط صحرا یک سلول از صفحه گسترده است. میزان بارآبی مجهول در بلوک ۱ از حاصل جمع دبی ویژه (دبی در واحد عرض) ورودی از بلوکهای مجاور به دست می آید. دبی ویژه ورودی از بلوک ۲ به بلوک ۱ که با  $q_{21}$  نمایش داده می شود با عرض واحد در جهت Z با استفاده از قانون داریسی از این معادله به دست می آید:

$$q_{21} = K \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \Delta z \quad (2)$$

که در این رابطه K ضریب هدایت هیدرولیکی مواد متخلخل،  $h_2$  بار آبی کلی در بلوک ۲ و  $h_1$  بار آبی در بلوک ۱ است. با در نظر گرفتن میزان دبی ویژه ورودی از بلوکهای مجاور مجموع کلی دبی ورودی به بلوک ۱،  $q_{1in}$  بدست می آید.

$$q_{1in} = q_{21} + q_{31} + q_{41} + q_{51} \quad ( )$$

$$q_{1in} = K \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K \frac{h_3 - h_1}{\Delta x} \Delta x + K \frac{h_4 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K \frac{h_5 - h_1}{\Delta z} \Delta x = 0$$

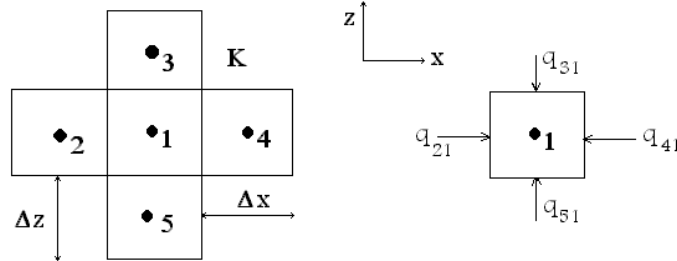
برای شرایط جریان پایدار،  $q_{1in}$  باید برابر صفر باشد. در نتیجه با قرار دادن معادله (۳) برابر صفر و حل آن برای  $h_1$  با استفاده از نرم افزار Mathematica 4.0 به راحتی می توان نوشت:

$$h_1 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta z)^2 (h_2 + h_4) + (\Delta x)^2 (h_3 + h_5)}{(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2} \quad (4)$$

اگر بلوک ها به صورت مربعی شکل باشند ( $\Delta x = \Delta z$ )، آنگاه داریم:

$$h_1 = \frac{1}{4} (h_2 + h_3 + h_4 + h_5) \quad (5)$$

معادله (۵) را "عملگر ۵ نقطه‌ای" می‌نامند که از حل معادله لاپلاس با روش تفاضلهای محدود برای شرایط همگن و یکسان نیز قابل استخراج است و در کتب «بیر ۱۹۷۲» [۱] و «وانگ و اندرسون ۱۹۸۲» [۸] آورده شده است.



شکل (۱) محاسبات جریان در محیط همگن و یکسان

توجه شود که معادله ۵ با استفاده از قانون داری و معادله پیوستگی بدون استفاده از معادله لاپلاس به دست آمده است. استخراج روابط ریاضی در دو روش بلوک‌بندی و تفاضلهای محدود برای جریان در محیط همگن و یکسان اختلاف بسیار کمی دارند. اگرچه مزیت‌های روش بلوک‌بندی به لحاظ کاربردی در مسائل پیچیده محیط نایکسان و ناهمگن آشکار خواهد شد. معادلات ۴ و ۵ نشان می‌دهند که  $h_1$  به عنوان متوسط وزنی بار آبی کلی از بلوکهای مجاور است. در معادله ۵ ضریب وزنی هر کدام از بلوکهای مجاور برابر  $1/4$  است. این ضریب  $1/4$  تنها برای شرایط جریان دو بعدی پایدار در محیط یکسان، همگن، که هر بلوک توسط چهار بلوک مجاور احاطه شده صادق است؛ زیرا که تمام چهار بلوک مجاور به طور مساوی در ایجاد بار آبی در بلوک ۱ شرکت پذیری دارند. برای شرایط دیگر ضریب وزنی دیگر  $1/4$  نیست و به آن شرایط متفاوت بستگی دارد. به هر حال چنانکه در معادله ۵ دیده می‌شود، مجموع ضرایب وزنی در معادله مربوط به هر بلوک باید برابر یک باشد.

### مرزهای نفوذ ناپذیر

با استفاده از روش بلوک‌بندی معادله مرزهای نفوذ ناپذیر به راحتی ایجاد می‌شوند. شکل (۲) نشان دهنده شکل هندسی سه نوع معمول شرایط مرزی نفوذ ناپذیر است.

برای یک مرزخطی نفوذ ناپذیر شکل (۲- a) دبی ورودی به بلوک ۱ به صورت زیر به دست می آید:

$$q_{1in} = q_{21} + q_{31} + q_{41}$$

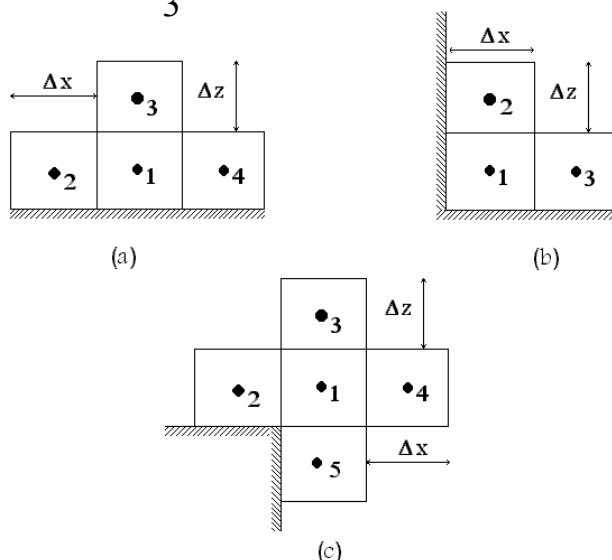
$$q_{1in} = K \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K \frac{h_3 - h_1}{\Delta z} \Delta x + K \frac{h_4 - h_1}{\Delta x} \Delta z = 0 \quad (6)$$

برای شرایط جریان پایدار،  $q_{1in}$  باید برابر صفر باشد. در نتیجه با قرار دادن معادله (۶) برابر صفر و حل آن برای  $h_1$  می توان نوشت:

$$h_1 = \frac{(\Delta z)^2 (h_2 + h_4) + (\Delta x)^2 (h_3)}{2(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2} \quad (7)$$

اگر بلوک ها به صورت مربعی شکل باشند، آنگاه  $h_1$  به صورت زیر به دست می آید:

$$h_1 = \frac{1}{3} (h_2 + h_3 + h_4) \quad (8)$$



شکل (۲) مرزهای نفوذ ناپذیر

مشابه این محاسبات، برای گوشه دامنه شکل (۲- b) دبی ورودی به بلوک ۱ به صورت زیر به دست می آید:

$$q_{1in} = q_{21} + q_{31}$$

$$q_{1in} = K \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K \frac{h_3 - h_1}{\Delta z} \Delta x = 0$$

برای شرایط جریان پایدار،  $q_{1in}$  باید برابر صفر باشد. در نتیجه با قرار دادن این معادله برابر صفر و حل آن برای  $h_1$  می‌توان نوشت:

$$h_1 = \frac{(\Delta z)^2 (h_2) + (\Delta x)^2 (h_3)}{(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2} \quad (9)$$

اگر بلوک‌ها به صورت مربعی شکل باشند ( $\Delta x = \Delta z$ )، آنگاه داریم:

$$h_1 = \frac{1}{2} (h_2 + h_3) \quad (10)$$

همچنین برای مرز با شرایط شکل (۲-۲) دبی ورودی به بلوک ۱ به هیچ عنوان تحت تأثیر مرز نیست و به سادگی با استفاده از معادله ۴ یا ۵ میزان بار آبی کلی برای بلوک ۱،  $h_1$  به دست می‌آید.

### مرزهای بار ثابت

معادله بارآبی برای بلوکهای مربوط به مرزهای بار ثابت با قرار دادن یک گره یا نود بر روی مرز و جمع کردن دبی ویژه ورودی از هر بلوک به دست می‌آید. شکل (۳-۳) یک مرز خطی بار ثابت را نشان می‌دهد. مجموع دبی ورودی به بلوک ۱ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$q_{1in} = q_{21} + q_{31} + q_{41} + q_{51}$$

$$q_{1in} = K \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \frac{3}{4} \Delta z + K \frac{h_3 - h_1}{\frac{1}{2} \Delta z} \Delta x + K \frac{h_4 - h_1}{\Delta x} \frac{3}{4} \Delta z + K \frac{h_5 - h_1}{\Delta z} \Delta x = 0$$

برای شرایط جریان پایدار،  $q_{1in}$  باید برابر صفر باشد. در نتیجه با قرار دادن معادله (۱۱) برابر صفر و حل آن برای  $h_1$  می‌توان نوشت:

$$h_1 = \frac{3(\Delta z)^2 (h_2 + h_4) + 4(\Delta x)^2 (2h_3 + h_5)}{6(\Delta z)^2 + 12(\Delta x)^2} \quad (12)$$

می‌توان نوشت: اگر بلوک‌ها به صورت مربعی شکل باشند، آنگاه

$$h_1 = \frac{1}{18}(3h_2 + 8h_3 + 3h_4 + 4h_5) \quad (13)$$

معادله ۱۳ نشان می‌دهد که  $h_3$  بزرگترین ضریب وزن را برای بار آبی در بلوک ۱ دارد. این مطلب با مشاهدات ما از گره ۳ که نزدیکترین گره به گره ۱ است و بیشترین تأثیر را بر روی آن دارد، نیز سازگار است و با آن تأیید می‌شود.

شکل (۳-ب) گوشه‌ای از دامنه را نشان می‌دهد که یک طرف مرز نفوذ ناپذیر و یک طرف مرز بار ثابت قرار دارد. در این حالت مجموع دبی ورودی به بلوک ۱ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$q_{1in} = q_{21} + q_{31} + q_{41}$$

$$q_{1in} = K \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \frac{3}{4} \Delta z + K \frac{h_3 - h_1}{\frac{1}{2} \Delta z} \Delta x + K \frac{h_4 - h_1}{\Delta z} \Delta x = 0$$

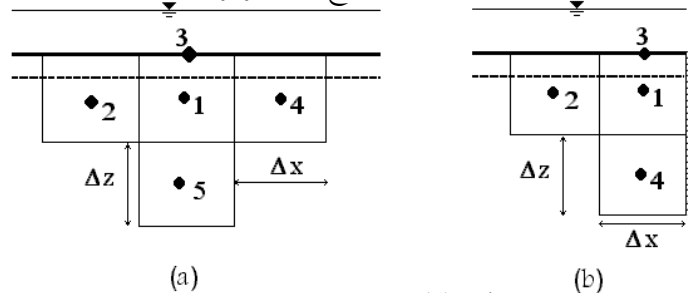
برای شرایط جریان پایدار،  $q_{1in}$  باید برابر صفر باشد. در نتیجه با قرار دادن این معادله برابر صفر و حل آن برای  $h_1$  می‌توان نوشت:

$$h_1 = \frac{3(\Delta z)^2 h_2 + 4(\Delta x)^2 (2h_3 + h_4)}{3(\Delta z)^2 + 12(\Delta x)^2} \quad (14)$$

اگر بلوک‌ها به صورت مربعی شکل باشند ( $\Delta x = \Delta z$ )، آنگاه داریم:

$$h_1 = \frac{1}{15}(3h_2 + 8h_3 + 4h_4) \quad (15)$$

توجه شود که دوباره در معادلات ۱۳ و ۱۵ مجموع وزن‌ها برابر یک است.



شکل (۳) مرزهای بار ثابت



### مرز دبی ثابت

شکل شماره ۴ یک مرز با دبی ثابت را نشان می‌دهد که جریان آب از سطح بالایی با سرعت  $\omega$  به درون خاک نفوذ می‌کند. در این حالت برای شرایط جریان پایدار،  $Q_{1in}$  به صورت زیر دست می‌آید.

$$q_{1in} = q_{21} + q_{31} + q_{41} + \frac{\omega}{K} (\Delta x)^2 \Delta z$$

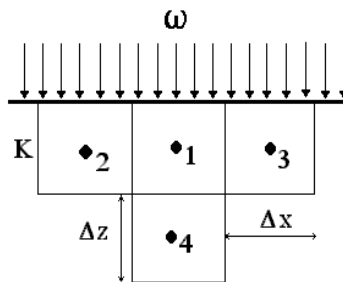
$$q_{1in} = K \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K \frac{h_3 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K \frac{h_4 - h_1}{\Delta z} \Delta x + \frac{\omega}{K} (\Delta x)^2 \Delta z = 0$$

برای شرایط جریان پایدار،  $Q_{1in}$  باید برابر صفر باشد. در نتیجه با قرار دادن این معادله برابر صفر و حل آن برای  $h_1$  می‌توان نوشت:

$$h_1 = \frac{(\Delta z)^2 (h_2 + h_3) + (\Delta x)^2 h_4 + \frac{\omega}{K} \Delta z (\Delta x)^2}{2(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2} \quad (16)$$

اگر بلوک‌ها به صورت مربعی شکل باشند ( $\Delta x = \Delta z$ )، آنگاه داریم:

$$h_1 = \frac{1}{3} \left( h_2 + h_3 + h_4 + \frac{\omega}{K} \Delta x \right) \quad (17)$$



شکل (۴) مرز دبی ثابت

### تخلیه و تغذیه

تخلیه و تغذیه از یک بلوک را می‌توان با استفاده از قانون پیوستگی به دست آورد. شکل ۵ مجموعه‌ای از بلوک داخلی را نشان می‌دهد که از بلوک ۱ تخلیه‌ای با دبی  $Q$  انجام می‌شود. در

این حالت دبی ورودی خالص به بلوک ۱ برابر  $Q$  و برابر است با:

$$Q = K \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K \frac{h_3 - h_1}{\Delta z} \Delta x + K \frac{h_4 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K \frac{h_5 - h_1}{\Delta z} \Delta x \quad (18)$$

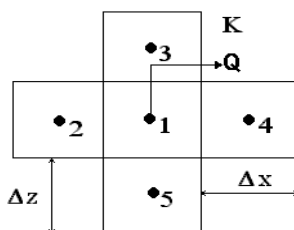
با حل معادله ۱۸ برای  $h$  به کمک نرم افزار Mathematica 4.0 داریم:

$$h_1 = \frac{(\Delta z)^2 (h_2 + h_4) + (\Delta x)^2 (h_3 + h_5) - \frac{Q}{K} \Delta z \Delta x}{2(\Delta z)^2 + 2(\Delta x)^2} \quad (19)$$

اگر بلوک‌ها به صورت مربعی شکل باشند ( $\Delta x = \Delta z$ )، آنگاه داریم:

$$h_1 = \frac{1}{4} \left( h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + \frac{Q}{K} \right) \quad (20)$$

اگر تخلیه از بلوک صورت گیرد یعنی علامت  $Q$  مثبت باشد،  $h_1$  کمتر است از مقداری که در معادله ۵ داده شده است و این نتیجه با درک ذهنی ما هم همخوانی دارد، زیرا مسلماً اگر آبی از بلوک تخلیه شود، باید افت بارآبی در آن نقطه ایجاد گردد و  $h_1$  کمتر شود. برای تغذیه به بلوک نیز به سادگی علامت منفی را برای  $Q$  در معادلات ۱۹ و ۲۰ انتخاب می‌کنیم و در این صورت  $h_1$  بزرگتر از مقدار نرمال معادله ۵ است و سبب افزایش بارآبی می‌شود.



شکل (۵) تخلیه و تغذیه در بلوک ۱

### ناهمسانی

معادلات ۱۹ و ۲۰ را می‌توان برای مواد متخلخل ناهمسان بازنویسی کرد و معادلات بارآبی در محیط ناهمسان را به دست آورد. شکل (۶) بلوکهای محیط همگن و ناهمسان را که هدایت هیدرولیکی در جهت افقی و عمودی به ترتیب برابر  $K_x$  و  $K_z$  است نشان می‌دهد. این مقادیر در جهات اصلی تانسور هدایت هیدرولیکی است و مؤلفه‌های غیر قطری آن صفرند. با جمع جبری جریان ورودی به بلوک ۱ خواهیم داشت:

$$q_{lin} = K_x \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K_z \frac{h_3 - h_1}{\Delta z} \Delta x + K_x \frac{h_4 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K_z \frac{h_5 - h_1}{\Delta z} \Delta x = 0 \quad (21)$$

با حل معادله ۲۱ برای  $h$  به کمک نرم افزار Mathematica 4.0 می‌توان نوشت:

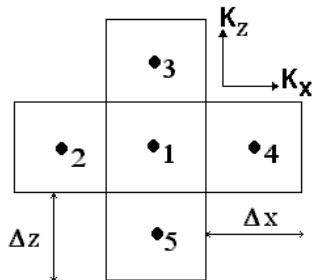
$$h_1 = \frac{K_x(\Delta z)^2(h_2 + h_4) + K_z(\Delta x)^2(h_3 + h_5)}{2K_x(\Delta z)^2 + 2K_z(\Delta x)^2} \quad (22)$$

اگر بلوک ها به صورت مربعی شکل باشند  $(\Delta x = \Delta z)$ ، آنگاه داریم:

$$h_1 = \frac{K_x(h_2 + h_4) + K_z(h_3 + h_5)}{2(K_x + K_z)} \quad (23)$$

اگر  $K_x = K_z$  باشد، آنگاه معادله ۲۳ دوباره به همان معادله ۵ تبدیل می شود. اگر  $K_x > K_z$

باشد، بلوکهای ۲ و ۴ بسیار بیشتر از بلوکهای ۳ و ۵ بر روی  $h_1$  تاثیر دارند.



شکل (۶) محیط همگن ناهمسان

### ناهمگنی

یک امتیاز بسیار بزرگ روش بلوک بندی صفحه گسترده توانایی اعمال ناهمگنی در محاسبات است. شکل (۷-ا) یک مرز خطی میان دو خاک یکسان با ضرایب هدایت هیدرولیکی متفاوت را نشان می دهد. همانند این روش با جمع کردن جریان ورودی به بلوک یک از بلوکهای

مجاور و برابر صفر قرار دادن آن،  $h_1$  را به دست می آوریم:

$$q_{lin} = K_2 \frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \Delta z + \frac{2K_2K_1}{K_2 + K_1} \frac{h_3 - h_1}{\Delta z} \Delta x + K_2 \frac{h_4 - h_1}{\Delta x} \Delta z + K_2 \frac{h_5 - h_1}{\Delta z} \Delta x = 0 \quad (24)$$

که در این معادله عبارت  $2K_2K_1/(K_2 + K_1)$  هدایت هیدرولیکی سری معادل، میان

گره های ۱ و ۳ است. با حل معادله ۲۴ برای  $h_1$  به کمک نرم افزار Mathematica 4.0

می توان نوشت:

$$h_1 = \frac{(\Delta z)^2(h_2 + h_4) + (\Delta x)^2 \left( \frac{2}{1 + K^*} h_3 + h_5 \right)}{2(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2 \left( \frac{2}{1 + K^*} + 1 \right)} \quad (25)$$

که در این معادله،  $K^*$  یک نسبت بدون بعد  $K_2/K_1$  است. اگر بلوک ها به صورت مربعی

شکل باشند ( $\Delta x = \Delta z$ )، آنگاه:

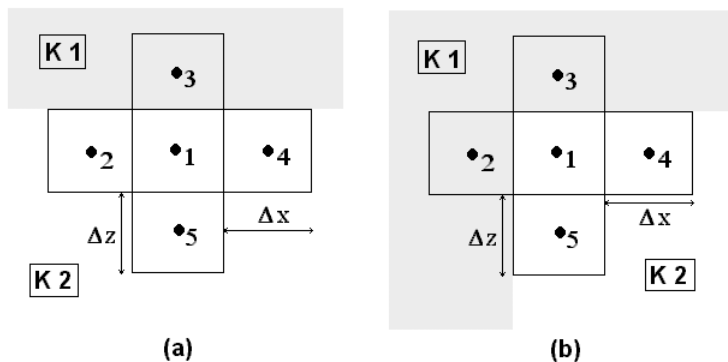
$$h_1 = \frac{h_2 + \frac{2}{1+K^*}h_3 + h_4 + h_5}{3 + \frac{2}{1+k^*}} \quad (26)$$

اگر  $K^* = I$  باشد، آنگاه معادله ۲۶ دوباره به همان معادله ۵ مربوط به محیط همگن تبدیل می‌شود.

شکل (b-۷) یک مرز گوشه میان دو خاک یکسان با ضرایب هدایت هیدرولیکی متفاوت را نشان می‌دهد. شبیه این روش با جمع کردن جریان ورودی به بلوک یک از بلوکهای مجاور و برابر صفر قرار دادن آن،  $h_1$  را برای حالتی که بلوکها مربعی شکل باشند به صورت زیر دست می‌آوریم:

$$h_1 = \frac{\frac{2}{1+K^*}(h_2 + h_3) + h_4 + h_5}{2 + \frac{4}{1+k^*}} \quad (27)$$

اگر  $K^* = I$  باشد، آنگاه معادله ۲۷ به معادله ۵ مربوط به محیط همگن تبدیل می‌شود.



شکل (۷) محیط ناهمگن و همسان

### دستورالعمل کلی برای ایجاد معادلات صفحه گسترده

برای حل بعضی از موارد خاص مسائل نشت در آب زیرزمینی معادلات صفحه گسترده بیشتری لازم خواهد شد. برای مثال معادلاتی مربوط به محیط ناهمگن و نایکسان با شرایط

مرزی متفاوت مورد نیاز است. در هر صورت روش ایجاد معادلات چنان است که گفتیم و به طور خلاصه به صورت زیر است:

- ۱- ابتدا با رسم شکل هندسی بلوکها آنها را شماره گذاری میکنیم. با در نظر گرفتن این اصل که بارآبی کلی در مرکز بلوک ۱ از تاثیر بارآبی در بلوکهای مجاور آن که مرز خطی با آن دارند نه مرز نقطه‌ای، به راحتی می‌توان بار آبی را برای هر شکل هندسی با شرایط نایکسان و ناهمگن به دست آورد. برای شرایط ناهمگن، معمولاً بهتر است مرز بلوکها با مرز تغییر جنس مطابق شکل ۷ روی هم قرارگیرند. به عبارت دیگر مرز بین دو جنس متفاوت نباید از وسط بلوک بگذرد.
- ۲- با استفاده از قانون داری معادله‌ای برای جریان ورودی به بلوک ۱ نوشته می‌شود. این معادله باید شامل تمامی بلوکهای مجاور بلوک ۱، مرزها و نقاط تخلیه و تغذیه درون بلوک شود. تنها بلوکهایی که مرز خطی مشترک با بلوک ۱ دارند در نظر گرفته شود. جریان از بلوکهای مجاور که فقط مرز نقطه‌ای با بلوک ۱ دارند شامل نمی‌شود، چون این بلوکها سطح مقطع مشترکی برای عبور جریان به بلوک ۱ ندارند.
- ۳- چون برای جریان پایدار، مجموع جبری جریانهای ورودی به بلوک ۱ صفر است. حاصل جمع جریان برابر صفر قرار داده می‌شود.
- ۴- معادله حاصل از جمع جبری جریان، برای مجهول  $h_1$  حل می‌شود.

### روش حل صفحه گسترده

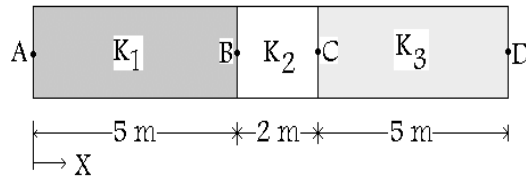
معادلات ۲ تا ۲۷ برای جریان پایدار دو بعدی در سفره محبوس استخراج شدند. برای حل چنین مسأله‌ای از مسائل آب زیرزمینی با استفاده از صفحه گسترده کامپیوتری، ابتدا دامنه جریان با گره بندی منظم تقسیم می‌شود. در اینجا به لحاظ در دسترس بودن صفحه گسترده اکسل برای همگان سعی می‌شود مثال عددی در محیط صفحه گسترده اکسل حل شود. اگر بلوکها را مربعی انتخاب کنیم آنگاه  $\Delta x = \Delta z$  است و معادلات صفحه گسترده ساده‌تر خواهد شد. اگرچه در بعضی موارد به سبب دقت محاسبات در یک جهت خاص مثل Z بهتر است  $\Delta x$  متفاوت

$\Delta Z$  انتخاب شود. هر سلول صفحه گسترده با معادله مناسب آن پر می شود. چون معادله موجود در هر سلول به سلولهای دیگر مرتبط است، برای جلوگیری از اخطارهای مجدد نرم افزار باید محاسبات خودکار در صفحه گسترده را خاموش کرد و سپس فرمولها وارد شوند. در صفحه گسترده اکسل در منوی **Tools**، کلید **Options** را انتخاب کنید و در زیر منوی **Calculation**، **Manual** را علامت بزنید. برای اجرای محاسبات، باید بعد از ایجاد مدل **Shift+F9** را فشار دهید. مقادیر عددی بار ثابت معلوم که شرایط مرزی هستند باید بیرون از دامنه در یک ردیف یا ستون جداگانه وارد شوند. به همین طریق بار آبی یا بار فشار محاسبه شده در مرزهای نفوذ ناپذیر، هم باید خارج از دامنه قرار گیرند. مرزهای شیبدار که نه افقی هستند و نه عمودی، باید به صورت پله نردبان ایجاد شوند. چون در تمامی مسائل جریان آب تقارن سبب کاهش دامنه حل و بالا رفتن دقت محاسبات است، سعی کنید از تقارن استفاده نمایید.

بعد از وارد کردن معادلات در صفحه گسترده با فشار دادن هر بار کلیدهای **Shift+F9** یک بار محاسبات انجام می شود. محاسبات را تا جایی که تغییر در بار آبی در تمامی سلولها ناچیز گردد تکرار کنید و به دقت مورد نیاز برسید. البته می توان محاسبات را به صورت خودکار نیز انجام داد. برای این کار در صفحه گسترده اکسل در منوی **Tools**، کلید **Options** را انتخاب کنید و در زیر منوی **Automatic**، **Calculation** را علامت بزنید و تعداد تکرار محاسبات را در همین منو مشخص کنید (برای مثال تعداد تکرار ۵۰ کافی است) و معیار دقت را در خانه **Maximum Change** مشخص کنید (برای مثال دقت 0.01 کافی است). با انتخاب محاسبات خودکار، در صورتی که هر کدام از شرایط رسیدن به حد اختلاف در مقادیر بار آبی در تکرارهای متوالی و یا اتمام تعداد تکرار به وقوع بپیوندد، محاسبات به پایان خواهد رسید. خطوط هم پتانسیل را می توان با استفاده از مقادیر بار آبی محاسبه شده رسم کرد. در صورت نیاز خطوط جریان را می توان ترسیم کرد و شبکه جریان را به دست آورد. معمولاً هر چه تعداد بلوکها بیشتر باشد حل دقیقتر است ولی هزینه و وقت بیشتری لازم دارد.

**مثال ۱، جریان یک بعدی در محیط ناهمگن**

شکل شماره (۸)، یک ستون افقی خاک را که جریان آب به صورت افقی از چپ به راست در آن در حرکت است نشان می‌دهد. این ستون خاک از سه نوع خاک ۱، ۲ و ۳ تشکیل شده است. بارآبی کلی ثابت در مرز سمت چپ در نقطه  $A$ ،  $h_A$ ، برابر ۱۰ متر و بارآبی در مرز سمت راست در نقطه  $D$ ،  $h_D$ ، برابر با صفر است. ضریب هدایت هیدرولیکی سه خاک  $50K_3 = K_2 = 5K_1$  انتخاب شده است. مقدار بارآبی کلی در تمامی نقاط بین مرزها مجهول است.



شکل ۸ دامنه جریان یک بعدی در محیط ناهمگن

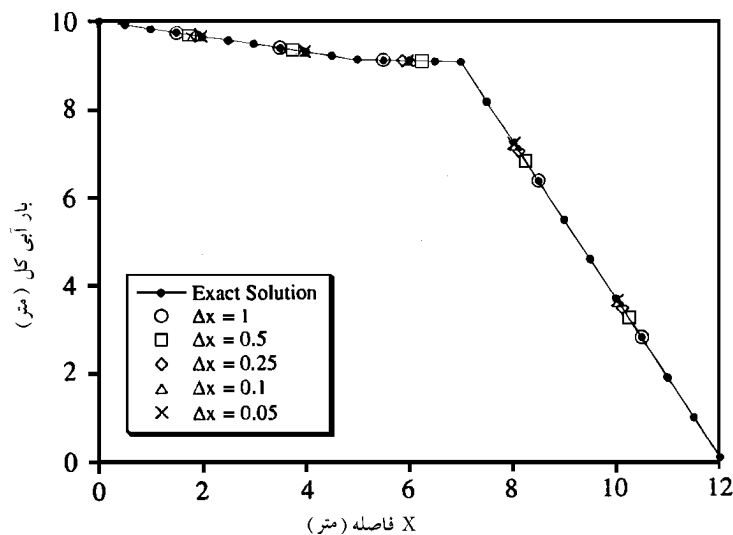
با حل دقیق این مسأله به روش تحلیلی مقدار بارآبی کلی در نقطه  $B$ ، برابر  $h_B = 9.097$  و بارآبی در نقطه  $C$ ،  $h_C = 9.025$  به دست آمده است. این مسأله با استفاده از معادلات شماره ۵، ۱۳ و ۲۶ برای حالت یک بعدی به وسیله صفحه گسترده با انتخاب  $\Delta x$  های مختلف برابر ۱، ۰/۵، ۰/۲۵، ۰/۱ و ۰/۰۵ متر حل شده است.

شکل (۹) مقایسه توزیع بارآبی را به وسیله هر دو روش نشان می‌دهد. بارآبی محاسبه شده با صفحه گسترده (روش عددی) بسیار نزدیک به جوابهای تحلیلی است. شکل (۱۰) نشان دهنده اختلاف (خطا) بین بار آبی محاسبه شده توسط صفحه گسترده با مقادیر حقیقی (حل تحلیلی) است. مقدار خطا برای  $\Delta x = 0.05$  به علت بزرگ بودن خطا نسبت به بقیه موارد، نشان داده نشده است. مقدار خطا با دور شدن از مرزهای بار ثابت و بر خلاف انتظار با کاهش طول  $\Delta x$  افزایش می‌یابد. علت اینکه خطا با کاهش طول  $\Delta x$  افزایش می‌یابد این است که معادله حاکم بر جریان در هر خاک خطی است و هر چه طول  $\Delta x$  افزایش می‌یابد به واقعیت نزدیک تر است. در این مورد خاص، خطای روند کردن اعداد بیش از خطای انتخاب طول  $\Delta x$  است.

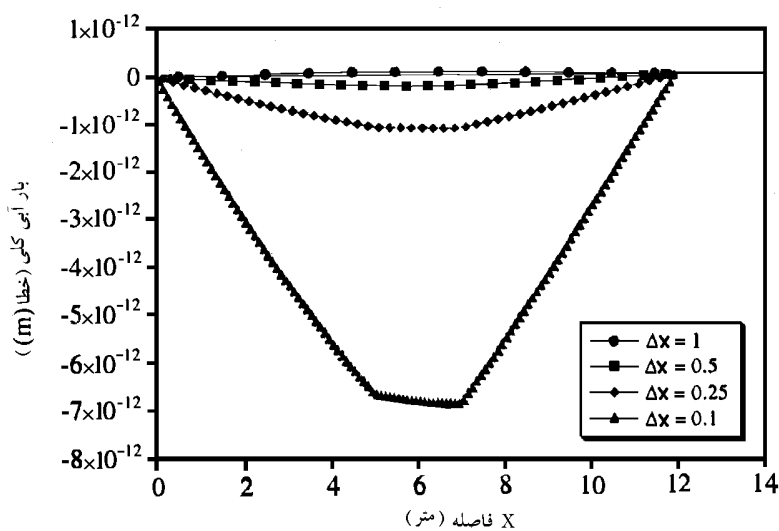
**مثال ۲، جریان دو بعدی در محیط همگن**

برای توصیف روش بلوک صفحه گسترده، یک مسأله مرزی که جوابهای دقیق آن، با استفاده از

حل تحلیلی در دست است حل شده و با جوابهای دقیق مقایسه شده است. این مثال با استفاده از نرم افزار صفحه گسترده Excel 7.0 بر روی کامپیوتر شخصی پتئیوم اجرا شده و جوابهای به دست آمده با حل دقیق تحلیلی برابری می کند



شکل (۹) مقایسه توزیع بار آبی با  $\Delta x$  های متفاوت



شکل (۱۰) اختلاف (خطا) بین بار آبی محاسبه شده توسط صفحه گسترده با مقادیر حقیقی (حل تحلیلی)



دقت روش بلوک بندی در صفحه گسترده را می توان با حل این مثال دو بعدی که حل آن به روش تحلیلی به وسیله «تات ۱۹۶۲» [۷] ارائه شده، آزمایش کرد. شکل (۱۱) شکل هندسی دامنه مسأله را نشان می دهد. مرزهای AB و BC و CD مرزهای نفوذناپذیرند. بارآبی کلی در طول مرز AD با رابطه خطی زیر تغییر می کند.

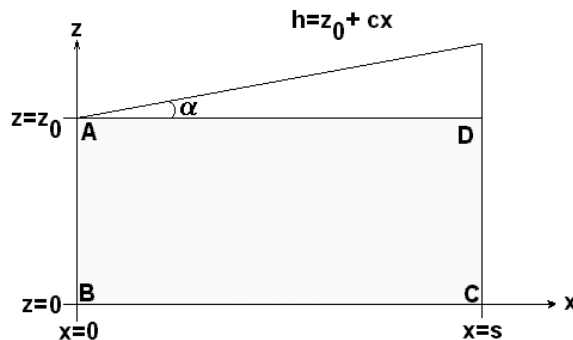
$$h(x,z)=z_0+cx \quad ( )$$

که در آن  $c = \tan \alpha$  و  $\alpha$  شیب سطح آب است. برای جریان پایدار در محیط همگن و یکسان حل دقیق از حل تحلیلی معادله لاپلاس به صورت زیر به دست می آید.

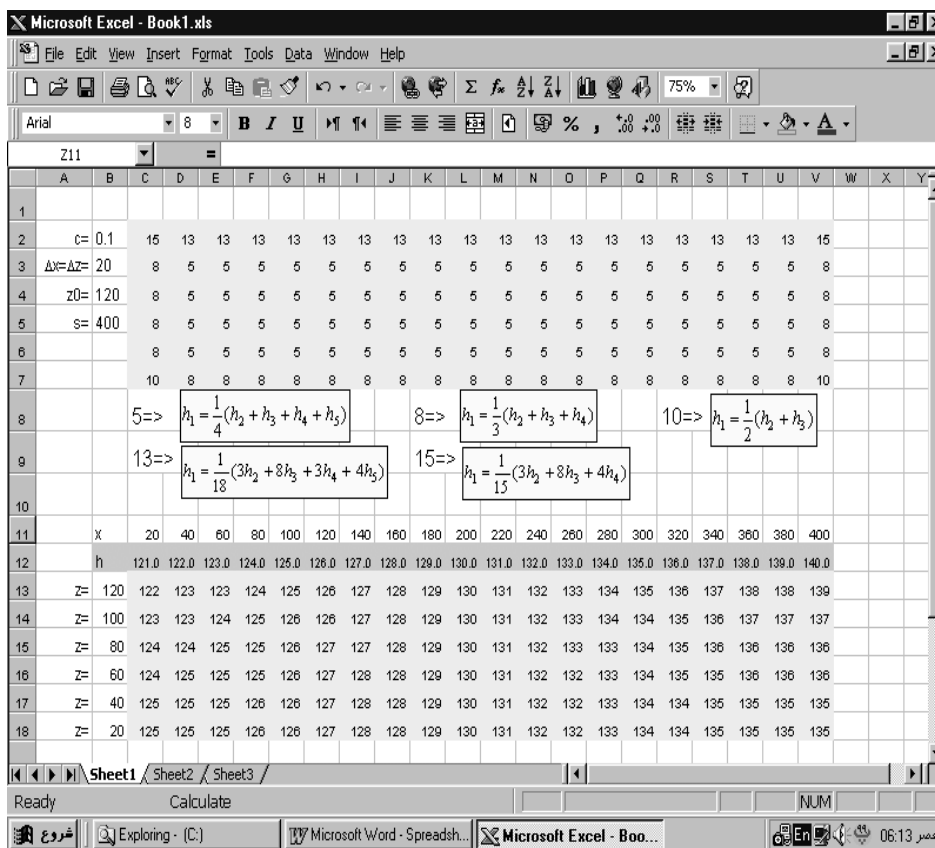
$$h(x,y) = z_0 + \frac{cs}{2} - \frac{4cs}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2m+1)\frac{\pi x}{s}\right] \cosh\left[(2m+1)\frac{\pi z}{s}\right]}{(2m+1)^2 \cosh\left[(2m+1)\frac{\pi z_0}{s}\right]} \quad (29)$$

که در آن S طول دامنه حل و  $z_0$  ارتفاع از سطح مبنا در مرکز مختصات مطابق شکل شماره ۸ هستند.

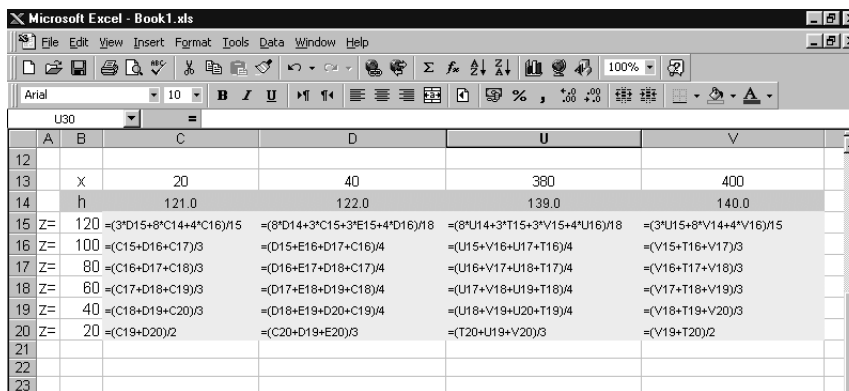
مسأله «تات ۱۹۶۲» [۷] برای  $s=400m$  و  $z_0=120m$  و  $c=0.05$  با استفاده از صفحه گسترده اکسل به صورت زیر حل شده است. پنج حل جداگانه برای  $\Delta x = \Delta z = 40, 20, 10, 5, 2.5m$  به دست آمده است. معادلات ۵، ۸، ۱۰، ۱۳، و ۱۵ برای این حل مورد نیاز است. شکل ۱۲ و ۱۳ حل را تنها برای  $\Delta x = \Delta z = 20m$  نشان می دهند.



شکل (۱۱) مسأله جریان ناحیه ای Toth، اقتباس از فریز و چری ۱۹۷۹

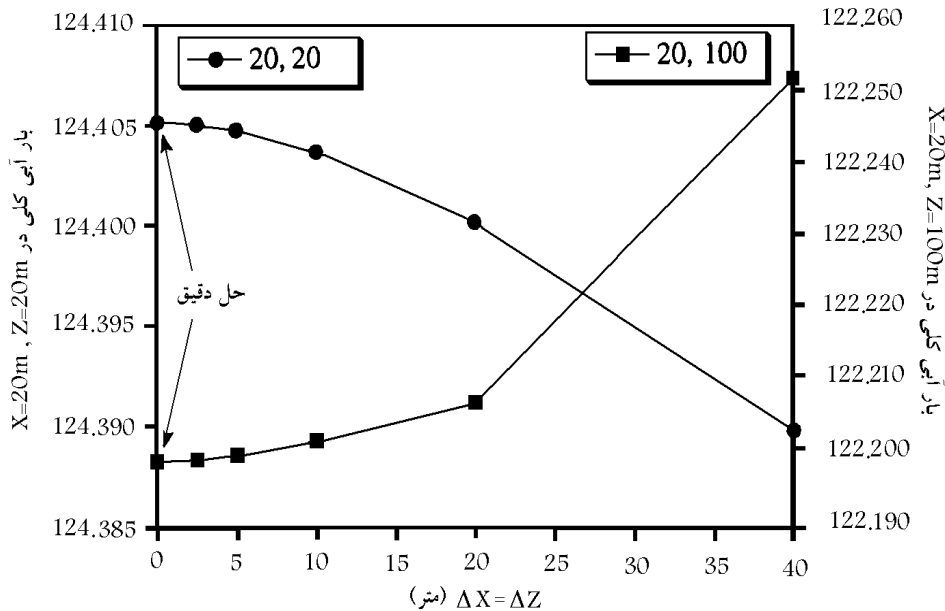


شکل ۱۲ شماره معادلات استفاده شده و صفحه گسترده محاسباتی اکسل



شکل (۱۳) نحوه نوشتن معادلات در اکسل (ستونهای E تا T حذف شده‌اند)

شکل ۴ نشان دهنده بارآبی کلی در دامنه جریان دو عدی در نقاطی با مختصات  $(X=20, Z=20)$  و مختصات  $(X=20, Z=100)$  به ازاء شبکه بندی  $\Delta x=\Delta z=40,20,10,5,2.5m$  می باشد.



شکل (۱۴) مقدار بارآبی در دو نقطه از دامنه جریان دو بعدی برای  $\Delta x=\Delta z$  های متفاوت بر حسب متر

همانطور که از این شکل دیده می شود، در هر دو نقطه انتخابی در دامنه هر چه  $\Delta x=\Delta z$  کوچکتر می شود، مقدار حل به جواب دقیق نزدیکتر می گردد. درحقیقت خطای بارآبی محاسبه شده برای  $\Delta x=\Delta z=40m$  حدود ۰/۰۵ درصد نسبت به جواب دقیق می باشد. بنابراین، برای این مسأله حتی انتخاب شبکه بزرگ مقیاس نیز جوابهای بسیار مناسبی را به دست می دهد. این موضوع بخصوص حائز اهمیت است که برای مسئله تات، با انتخاب فواصل  $\Delta x=\Delta z=40m$  تعداد ۳۰ بلوک و با انتخاب  $\Delta x=\Delta z=2.5m$  تعداد ۷۶۸۰ عدد بلوک ایجاد خواهد شد و جواب مسأله با تقسیم دامنه به ۳۰ بلوک از دقت بسیلر خوبی برخوردار بوده و با جواب در حالی که ۷۶۸۰ عدد بلوک انتخاب شود، برابری می کند.

**مثال ۳ جریان بک بعدی مربوط به مسئله جیکوب (Jacob, 1943)**

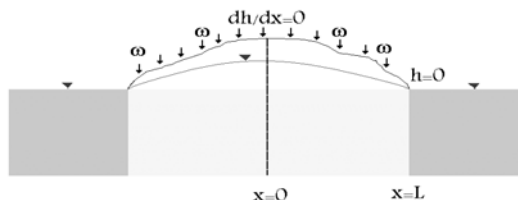
شکل ۱۵ مقطع یک جزیره مربوط به مسأله «Long Island جیکوب ۱۹۴۳» [۶] که به وسیله آب محصور شده و از بالا تغذیه می شود را نشان می دهد. معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان پایدار در این جزیره با تغذیه از بالا به صورت زیر است:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\omega}{T} \quad ( )$$

که در آن  $\omega$  میزان تغذیه و  $v$  برابر  $h$  و  $T$  ضریب انتقال سفره می باشند. حل تحلیلی این مسأله با شرایط مرزی جریان صفر در مرکز جزیره (خط مقسم آبی) در  $X=0$  و بارآبی ثابت در سطح دریا در  $X=-L$  و  $X=L$  به وسیله «جیکوب» به صورت زیر ارائه شده است.

$$v(x) = \omega \frac{(L^2 - x^2)}{2T} \quad ( )$$

با استفاده از معادله شماره (۳۱) حل تحلیلی این مسئله در شکل شماره (۱۶) نشان داده شده است.



شکل (۱۵) دیاگرام مربوط به مثال ۳ (جیکوب ۱۹۴۳)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	v(x)				L= 500 (m)				
2	-500	$0 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$				$\omega = 0.1$ (m)				
3	-400	$9 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$				T= 500 (m <sup>2</sup> /day)				
4	-300	$16 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
5	-200	$21 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
6	-100	$24 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
7	0	$25 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
8	100	$24 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
9	200	$21 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
10	300	$16 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
11	400	$9 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
12	500	$0 = \frac{\omega}{2T} (L^2 - A^2)$								
13										
14										

$$v(x) = \omega \left( \frac{L^2 - x^2}{2T} \right)$$

شکل ۱۶ حل تحلیلی مسئله Long Island جیکوب ۱۹۴۳

بعلاوه حل این معادله با استفاده از صفحه گسترده اکسل در شکل ۱۷ نشان داده شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، معادله ۱۷ برای شرایط جریان یک بعدی در بلوکهای صفحه گسترده وارد شده و مسأله حل گردیده است. جوابهای به دست آمده از صفحه گسترده با دقت بسیار زیاد به حل تحلیلی نزدیک است. لازم به ذکر است که در این مثال بار آبی  $h$  همان متغیر  $V$  است. حل مسأله با انتخاب فواصل کوچکتر برای  $\Delta x$  دقیق‌تر شده و به علت ناچیز بودن خطا در اینجا آورده نشده است.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	K (m) = 10		$\Delta X = 100$									
2	$\omega$ (m) = 0.1		L = 500									
3												
4	-500	-400	-300	-200	-100	0	100	200	300	400	500	
5	0	9.0	16.0	21.0	24.0	25.0	24.0	21.0	16.0	9.0	0	
6												
7		$C5 = 0.5*(D5+B5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
8		$D5 = 0.5*(E5+C5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
9		$E5 = 0.5*(F5+D5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
10		$F5 = 0.5*(G5+E5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
11		$G5 = 0.5*(H5+F5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
12		$H5 = 0.5*(I5+G5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
13		$I5 = 0.5*(J5+H5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
14		$J5 = 0.5*(K5+I5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
15		$K5 = 0.5*(L5+J5)+(\$C\$2/\$C\$1)*\$E\$1$										
16												

شکل (۱۷) حل با صفحه گسترده

### مزایا و محدودیتهای روش

روش مدل‌سازی با بلوکهای صفحه گسترده مزایای زیادی از جمله سادگی، دقت، گستردگی موضوعات مورد استفاده، تعدد نرم افزارهای صفحه گسترده، سرعت زیاد در مدل سازی و زمان کم حل مسأله است. بعلاوه چون در این روش معادلات صفحه گسترده با دست وارد می‌شود، کاربر درک عمیقی از مسأله به دست می‌آورد. این درک مسلماً حین استفاده از مدل‌های تجاری نصیب کاربر نخواهد شد. از این نظر روش مذکور برای کلاسهای آموزشی و

تدریس بسیار کارا و مفید است.

روش مدل سازی با بلوکهای صفحه گسترده همچنین دارای محدودیتهای متعددی است. اول این که، چون معادلات با دست نوشته می شود، اگر کاربر دقت زیاد نداشته باشد، به راحتی یک اشتباه کوچک کل جوابها را تحت الشعاع قرار می دهد. بعلاوه، روش تکرار، مورد استفاده در صفحه گسترده امکان دارد قوی نباشد، «واتسون ۱۹۹۳» [۹]، پیشنهاد می کند که در صورت نبودن همگرایی سریع روش تکرار می توان با عوض کردن مرتبه محاسبات از ردیفی به ستونی یا برعکس سرعت همگرایی را افزایش داد. به عقیده «ینر ۱۹۹۳» [۱۲] شیوه های عددی پیشرفته نظیر  $SOR^1$  را نمی توان به سادگی در حل با صفحات گسترده به کار برد. این روش همچنین محدود به شکل سلول مستطیلی شکل است و شکلهای دامنه که غیر مستطیلی هستند با بلوکهای مستطیل شکل ایجاد می گردند. از محدودیتهای دیگر آن که این روش برای مسائلی که جهت هدایت هیدرولیکی در جهتی غیر از عمودی و افقی باشند به کار نمی رود. در حال حاضر این روش در حال توسعه است تا برای جریانهای غیر محبوس، حالتی غیر ماندگار و سه بعدی نیز کارایی لازم را داشته باشد. ادامه تحقیق در این موضوع بی تردید برای جریانهای غیر ماندگار یا ناپایدار جذاب خواهد بود.

### نتیجه گیری

در این مقاله روش عمومی برای حل جریان پایدار محبوس با استفاده از مدل سازی با صفحه گسترده کامپیوتری ارائه شده است و نتایج بدست آمده را می توان چنین خلاصه کرد: معادلات به راحتی با استفاده از قانون داری و پیوستگی میان بلوکهای مجاور هم که مرز خطی با یکدیگر دارند ایجاد می گردند و استخراج معادله دیفرانسیل جزئی ضرورتی ندارد.

<sup>1</sup> Successive Over Relaxation

مثالهای ارائه شده نشان می‌دهند که روش حل با بلوکهای صفحه گسترده حتی وقتی که بلوکها بزرگ در نظر گرفته می‌شوند، جوابهای نسبتاً دقیقی ارائه می‌دهد. برای مسائل دو بعدی با افزایش تعداد بلوکها و کوچکتر کرده آنها دقت جوابها بالا می‌رود.

روش حل با بلوکهای صفحه گسترده به دلیل سادگی، دقت خوب، زمان کم، روشی جذاب و راهنمایی مناسب برای درک کلی از مسائل پیچیده بزرگ است. این روش محدودیتهایی نیز نظیر شکل هندسی مرزهای دامنه جریان، قوی نبودن شیوه‌های عددی تکرار، عدم کارایی در محیطهای با جهات هدایت هیدرولیکی متفاوت را دارد.

### منابع

1. Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, New York (1972) 764 .
2. Bear, J. and Verruijt A., *Modeling Groundwater Flow and Polution*, D.Reidel Publishing Co., Boston, (1987) 414.
3. Desai, C.S., *Flow through porous media*, Chapter 14 in *Numerical methods in Geotechnical Engineering*, C. Desai and J. Christian, Eds. McGraw-Hill, New York (1977) 458-505
4. Freeze, R. A. and Cherry, J.A. *Groundwater*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1979) 604 .
5. Harr, M.E., *Groundwater and Seepage*, McGraw-Hill, New York (1962) 315 .
6. Jacob, C.E., *Correlation of Ground-Water Levels and Precipitation on Long-Island*, New York. Transactions, American Geophysical Union, Papers--Hydrology (1943) 564-573.
7. Toth, J., *A Theory of Groundwater Motion in Small Drainage Basins in Central Alberta*, Journal of Geophysical Research, 67:4375-4387 (1962).
8. Wang, H.F. and Anderson, M.P., *Introduction to Groundwater Modeling*. W. F. Freeman and Co., San Fransisco (1982) 237 .

9. Watson, P., *Discussion of Flownet diagrams- the use of finite difference and a spreadsheet to determine potential heads*, Ground Engineering, (1993) 26:9:30
10. Wiliams, B.P., Smyrell A.G., and Lewis P.J., *Flownet diagrams- the use of finite difference and a spreadsheet to determine potential heads*, Ground Engineering, 26:5:32-38 (1993).
11. Wolff, T.F., *Spreadsheet Aplication in Geotechnical Engineering*, PWS, Publishing, Co. Boston (1995) 305.
12. Yener, H.S., *Discussion of Flownet diagrams- the use of finite difference and a spreadsheet to determine potential heads*, Ground Engineering, (1993) 26:9:30