دو فصلنامهٔ نظریه و عمل در برنامهٔ درسی
سال یازدهم، شمارهٔ ۲۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، ۳۹۰-۳۵۵

Journal of Theory & Practice in Curriculum
Vol.21 (11); 2023, 355-390

زیرساختارهای کسر و جایگاه آن در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی ایران[۱]

Subconstructs of Fraction and their Place in Elementary Mathematics Textbooks in Iran

مهدخت نقیبی[۲]

چکیده: برای فهم همه جانبه‌ی کسر باید به تمامی زیرساختارهای آن توجه داشت. یکپارچگی و تلفیق این زیرساختارها، به درک عمیق و مفهومی کسر منجر می‌شود. هدف از پژوهش حاضر، بررسی وجود این زیرساختارها و میزان استفاده آن‌ها در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی است. این مطالعه، به روش تحلیل محتوا و با استفاده از چارچوب نظری زیرساختارهای کییرن شامل پنج مقوله «جزء-کل»، «اندازه‌گیری»، «نسبت»، «خارج‌قسمت» و «عملگر»، انجام شد. تمامی فعالیت‌ها و تکالیف متن درس، شامل بخش‌های «فعالیت‌ها»، «کار در کلاس» و «تمرین‌ها» در فصل‌های مرتبط با کسر در کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های دوم تا ششم دوره ابتدایی بررسی شد. نتایج تحلیل نشان داد که بیشترین مورد استفاده از زیرساختارهای کسر به ترتیب: جزء-کل(۴۹٪) ، اندازه‌گیری(۲۲٪)، نسبت(۱۶٪)، عملگر(۱۱٪) و خارج قسمت (۱٪) است، بنابراین توجه بسیار اندکی به زیر ساختار خارج‌قسمت در کتاب‌های ریاضی ابتدایی شده است. همچنین از ظرفیت برخی از زیرساختارها به طور کامل استفاده نشده است.

واژگان کلیدی: کسر، زیرساختارها، تحلیل محتوا، کتاب درسی ابتدایی

M. Naghibi

Abstract: In order to fully understand the concept of fraction, all of its subconstructs must be considered and interrelated. The purpose of this study is to examine the presence of these subconstructs and their level of use in elementary mathematics textbooks in Iran. A content analysis study based on Kieren's subconstructs framework with five categories, namely; part-whole, measurement, ratio, quotient, and operator, was conducted to analyze all 2-6 grades' mathematics textbooks' activities and problems in chapters related to the concept of fraction. The results of the analysis showed that the most used subconstructs respectively are: Part-Whole (49%), Measurement (22%), Ratio (16%), Operator (11%), Quotient (1%). There is very little attention given to the subconstruct of 'quotient' in these textbooks. Moreover, the potential of some subconstructs has not been fulfilled.

Keywords: fraction, subconstructs, content analysis, Elementary Textbooks

۱. تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۲۶، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۱/۳۰
۲. استادیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، رایانامه:mnb5172@cfu.ac.ir

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

مقدمه

مفهوم اعداد گویا (اعداد کسری) و مفاهیم مرتبط با آن برای یادگیری ریاضیات مدرسه‌ای و برای درک ایده های ریاضی پیشرفته تر، مهم و اساسی است (گتنت[1] و کالینگهام[2] ۲۰۲۱، کالبرگ[3] و رانسون[4] ، ۲۰۱۳). اهمیت این اعداد توسط بهر[5]، لش[6]، پست[7] و سیلور[8] (۱۹۸۳) در سه دیدگاه مختلف خلاصه شده است: از نظر عملی، توانایی به کارگیری آن‌ها امکان رویارویی با موقعیت ها و مشکلات را در زندگی واقعی فراهم می‌کند؛ از نظر روانشناسی، اعداد گویا زمینه بسیار خوبی را ایجاد می‌کنند که در آن دانش‌آموزان بتوانند ساختارهای ذهنی خود را توسعه دهند و در نهایت، از دیدگاه ریاضی، درک اعداد گویا یکی از پایه هایی است که عملیات جبری اولیه بر آن تکیه دارد.

یاددهی و یادگیری مفهوم اعداد گویا، از طرفی، پیچیده و چالش برانگیز است (غلام آزاد، ۱۳۹۹، ژانگ[9] و همکاران، ۲۰۱٤، بهر و همکاران، ۱۹۸۳، هاروی[10]، ۲۰۱۲). بهر و همکاران (۱۹۸۳) خاطرنشان می‌کنند که مفاهیم مرتبط با اعداد کسری از جمله پیچیده‌ترین و مهم‌ترین ایده‌هایی هستند که دانش‌آموزان در چند سال اول تحصیل با آن‌ها مواجه می‌شوند. این پیچیدگی را می‌توان از منظرهای مختلفی مورد بحث قرار داد: تدریس، یادگیری، نوع تفکردانش آموزان، ماهیت ترکیبی و پیچیده آن و غیره. یکی از عوامل اصلی این پیچیدگی، این است که کسرها بنا به موقعیت‌های مختلف یادگیری، تعابیر و معانی مختلفی از خود نشان می‌دهند.

[1] Getenet
[2] Callingham
[3] Kullberg
[4] Runesson
[5] Behr
[6] Lesh
[7] Post
[8] Silver
[9] Zhang
[10] Harvey

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

کییرن[1] (۱۹۷۶) اولین کسی بود که به صورت سیستماتیک به معرفی و بررسی این تعابیر پرداخت. او معتقد بود که برای درک کامل و عمیق *اعداد گویا* لازم است با این تعابیر یا اصطلاحا «زیر ساختارها» آشنا شویم. او برای ساختار اعداد کسری، ۵ زیرساختار : جز-کل (تقسیم یک کل یا یک واحد به چند قسمت برابر و سپس انتخاب تعدادی از این قسمت)، نسبت (ارتباط میان دو کمیت)، خارج‌قسمت (تقسیم مساوی[2] یک مقدار بین چند دسته)، اندازه‌گیری (تقسیم یک واحد به زیر واحدها و سپس شمارش واحدها و زیرواحدها که برای اندازه گرفتن مقدار مورد نظر) و عملگر (تاثیر روی یک مقدار و تبدیل آن به مقدار دیگر)، معرفی کرد(کییرن، ۱۹۸۰). شورای ملی معلمان ریاضی[3](۲۰۰۰) نیز در اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، برنامه‌ریزان و مولفان کتاب‌های درسی را تشویق به درک و توسعه مفهومی اعداد کسری و تعابیر مختلف آن کرده است. درک معانی و تعابیر مختلف کسرها، پایه ای برای یادگیری موضوعات مرتبط با آن‌ها مثل مفهوم کسرهای برابر، جمع و تفریق، ضرب و تقسیم، اعداد اعشاری، تناسب و غیره است که دانش‌آموزان معمولا با آن‌ها مشکل دارند. بنابراین این شورا معتقد است که دانش‌آموزان برای اینکه عمیقاً در مورد کسرها و بسیاری از مفاهیم دیگر در ریاضیات مدرسه آگاه شوند، به تعبیرها و بازنمایی‌های مختلفی از کسرها نیاز دارند که درک آنها را توسعه دهد.

کییرن (۱۹۹۲) تاکید می‌کند که برنامه و کتاب درسی باید به کودک اجازه دهد تا به تفاوت‌های مهمی که از تعابیر مختلف ریاضی نشات می‌گیرد توجه کنند. او بر این باور است که معلمان و دانش آموزان باید بتوانند از طریق تجربیات دیگر، مرتبط با زیرساختارهای کسر، فراتر از موقعیت‌های یادگیری که فقط بر جز کل متمرکزند بروند. بسیاری از محققان دیگر نیز به محدودیت‌های معرفی کسرها با زیرساختار جز-کل و اهمیت مواجهه دانش‌آموزان با دیگر زیرساختارها اشاره می‌کنند (سایمون[4] و همکاران،

[1] Kieren
[2] partitioning
3 National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
4 Simon

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

۲۰۱۸، لامون[1] ۲۰۲۰، بهر و همکاران، ۱۹۹۲، مَک[2]، ۲۰۰۱، تزور[3] ۱۹۹۹) . نتایج تحقیق ایزدی و ریحانی (۱۴۰۰) بروی دانش‌آموزان پایه دوم نشان داد که دانش آموزان این پایه، درک محدودی از مفهوم کسر (زیرساختار جز- کل) دارند و توانایی استفاده از این مفهوم را در مواجهه با تکالیف و موقعیت های غیرمعمول ندارند. ریحانی و همکاران (۱۳۹۳)، در مطالعه دیگر به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان پایه ششم، درک متوسطی از کسرها دارند. این دانش‌آموزان زیرساختار جز-کل را بهتر فهمیده‌اند و درک ضعیفی از از سایر زیرساختارها دارند و برای فهم همه جانبه مفهوم کسر لازم است زیرساختارهای دیگر هم مورد توجه قرار گیرند.

گاوندر[4] (۲۰۲۱) در مطالعه خود با استفاده از تحلیل کتاب‌های درسی و تکالیف اجرا شده ، آموزش کسرها را با تمرکز بر زیرساختارها و ارتباط آن‌ها با هم در پایه های ٤-٦ بررسی می‌کند. یافته‌های او نشان می‌دهند که برای حمایت از درک مرتبط، قوی و کامل از مفاهیم کسری دانش‌آموزان، نیاز است که در کتاب‌های درسی و تکالیف داده‌شده، تاکید بیشتری بر زیرساختارهای مختلف شود چون این زیر ساختارها و ارتباطشان با هم نقش اساسی در توسعه مفهومی اعداد کسری دارند.

در پژوهش حاضر با استفاده از روش تحلیل محتوا و با تمرکز بر کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی، وجود زیر ساختارهای مهم کسر، مطابق با تعریف کیبرن (۱۹۸۰)، و میزان استفاده مستقیم از آن‌ها در این کتاب‌ها، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

چارچوب نظری

زیرساختارهای اعداد گویا

پژوهشگران زیادی (کیبرن ۱۹۷٦،۱۹۸۰،۱۹۸۸، بِر و همکاران ۱۹۹۲،۱۹۹۳،۱۹۸۳، نِشِر[5]۱۹۸۵، فرودنتال[6] ۱۹۸۳، اولسون[1] ۱۹۸۷ ، ۱۹۸۸، ورنیو[2] ۱۹۸۳ ، ۱۹۸۸ نقل

[1] Lamon
[2] Mack
[3] Tzur
[4] Govender
[5] Nesher
[6] Freudenthal

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

شده در نقیبی(۱۳۹۹)، تلاش کردند با بیان و تعریف زیر ساختارها و تعابیر مختلف اعداد گویا در قالب یک چارچوب نظری، به درک و فهم عمیق این اعداد کمک کنند. بسیاری از این پژوهش‌ها، تکمیل کننده پژوهش‌های قبلی و یا پژوهش‌های همزمان خود بودند. کییرن (۱۹۷٦) اولین کسی بود که به معرفی تعابیر مختلف اعداد گویا پرداخت. او معتقد بود که اعداد گویا به روش‌های متفاوتی می‌تواند تعبیر شود و درک این مفهوم وابسته به درک واضح و روشن هر یک از این تعبیرها دارد. او هفت تعبیر ممکن (کسر، اعداد اعشاری، دسته‌های هم‌ارزی از کسرها، نسبت، عملگر ضربی، خارج قسمت، اندازه روی محور اعداد) برای اعداد گویا شناسایی کرد و اولین فهرست خود را منتشر کرد. او در مطالعات بعدی خود، به دلیل نقدهایی که به برخی از این تعابیر وارد بود، این فهرست را جرح و تعدیل کرد و پنج ایده را به عنوان پایه های ضروری برای ساخت اعداد گویا (*جزء-کل* ، *نسبت*، *خارج قسمت*، *اندازه‌گیری و عملگر*) مشخص کرد (کییرن ۱۹۸۰). مشخصه ضمنی رابطه جزء کل که به نوعی در دیگر تعبیرها یافت می‌شود کییرن را در سال ۱۹۸۸ متقاعد ساخت تا تنها چهار تعبیر اساسی اندازه‌گیری، خارج قسمت، نسبت و عملگرضربی را معرفی کند که هر یک با تعبیر جز کل مرتبط است.

با الهام از فهرست کییرن (۱۹۸۰) و توسعه آن، بِر و همکاران (۱۹۸۳) فهرستی مشابه با کییرن معرفی کردند و تعابیر را زیرساختار نامیدند. آن‌ها این ۵ زیرساختاررا به عنوان زیرساختارهای اصلی برای درک اعداد گویا معرفی نمودند و با اضافه کردن مفاهیم عملیات جمع و ضرب کسرها، هم‌ارزی و حل مسئله، مدل

[1] Ohlsson
[2] Vergnaud

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

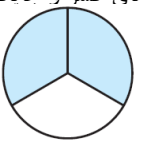
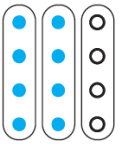
نظری خود را بر پایه آن بنا نهادند. در این مدل، زیرساختار جز-کل، ساختار اساسی برای توسعه مفهوم اعدادگویا و همچنین نقطه شروع آموزش سایر زیرساختارها به شمار می‌آید. محققان دیگر هم چارچوب‌ها عمدتا موازی با آن چه کییرن و بهر و همکاران در پژوهش های خود ارائه داده بودند مطرح کردند. میان این فهرست‌ها و پس از گذشت حدود سه دهه، زیرساختارهای ارائه شده توسط کییرن (۱۹۸۰) که شامل: جز-کل، نسبت، خارج قسمت، اندازه گیری و عملگر است، همچنان از عمومیت، محبوبیت و اقبال بیشتری میان آموزشگران ریاضی برخوردار است. با این که نقیبی (۱۳۹۹) در مطالعه خود به شرح این تعابیر پرداخته است ولی به دلیل اهمیت و نقش اساسی آن‌ها در تحلیل پیش‌رو، در ذیل به تعریف و بررسی دقیق‌تر هر یک از این زیرساختارها با جزئیات لازم می‌پردازیم.

زیرساختار جزء- کل:

ایدهٔ اصلی این زیرساختار، تقسیم یک کل به چند قسمت (جزء) مساوی و سپس انتخاب تعدادی از این قسمت‌ها (جزءها) است. کسر به تعبیر جزء-کل عددی است که ارتباط میان جزء و کل را بیان می‌کند صورت این کسر تعداد اجزای انتخاب شده و مخرج آن تعداد کل جزءها است.

به عنوان مثال، کسر $\frac{2}{3}$ به این تعبیر، می‌تواند نشان‌دهنده ۲ قسمت از پیتزایی باشد که به ۳ قسمت مساوی تقسیم شده و یا نشانگر ۲ دسته از ۳ دسته مساوی تیله‌هایی باشد که در تصویر زیر نشان داده شده است (تصویر ۱).

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

تصویر ۱ - نمایش کسر $\frac{2}{3}$ به تعبیر جزء-کل با مدل گسسته و پیوسته

کل ممکن است کمیت پیوسته و یا گسسته‌ای باشد (سودر[1]، فیلیپ[2] و همکاران ۱۹۹۸، سودر، آرمسترانگ[3] و همکاران، ۱۹۹۸). بنابراین چه زمینه مسئله شامل جزئی از کل به هم پیوسته و یا جزئی از یک مجموعه از عناصر گسسته باشد، این تعبیر، زیر ساختار جزکل در نظر گرفته می‌شود. باید دقت داشت در آموزش کسر، به کار بردن مدلی مناسب (پیوسته یا گسسته) برای مطابقت با زمینه مهم است. اگر زمینه مرتبط با بخشی از یک مجموعه باشد از اشیاء گسسته و اگر مرتبط با یک کل یکپارچه باشد، مدل مساحتی مناسب خواهد بود (پست، بهر و لش ۱۹۸۲).

زیرساختار اندازه‌گیری:

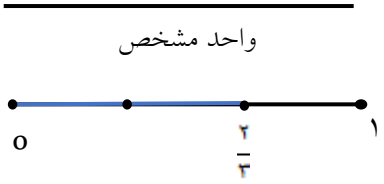
لامون(۲۰۰۵) این زیرساختار را به عنوان عدد اختصاص‌یافته به تعداد یا مقداری از کمیت‌های قابل اندازه‌گیری بیان می‌کند. ایده اصلی این زیرساختار، تعیین اندازه یک کمیت با توجه به یک واحد مشخص است. مفهوم واحد در این زیرساختار یک مفهوم اصلی و مهم به شمار می‌رود. کسر به تعبیر اندازه‌گیری، عددی است که اندازه کمیت را نسبت به واحد تعیین شده، به دست می‌دهد.

مثلا در تصویر ۲، بزرگی طول میله آبی، نسبت به واحد داده شده، اندازه گرفته می‌شود. طول آن $\frac{2}{3}$ واحد است.

میله

[1] Sowder
[2] Philipp
[3] Armstrong

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]



تصویر ۲- نمایش کسر $\frac{2}{3}$ به تعبیر اندازه‌گیری

برای تعیین دقیق‌تر کمیت، واحد اندازه گیری به زیرواحدها تبدیل می‌شود. این تقسیم برابر واحد ممکن است چندین بار اتفاق بیفتد. یعنی مثلا بعد از آن که واحدی به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شد، زیر واحد حاصل شده خود به ده قسمت برابر تقسیم شود و این روند همچنان ادامه پیدا کند. تعداد بخش‌های مساوی در واحد اندازه‌گیری، بنا به این که این واحد چند بار تقسیم برابر شده متفاوت است. این زیرساختار از جهاتی شبیه زیرساختار جز-کل است ولی تفاوت‌هایی هم با آن دارد. برخلاف زیرساختار جز-کل که در آن، تعداد کل بخش‌های تقسیم شده واحد (مخرج کسر) برجسته است، در زیرساختار اندازه‌گیری، تعداد بخش‌های انتخاب شده (صورت کسر) بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد (ون دو وال[1] و همکاران، ۲۰۱۳). یکی از از کاربردهای اصلی این زیرساختار، نمایش کسر به عنوان عدد روی محور اعداد است (بهر و همکاران، ۱۹۹۲).

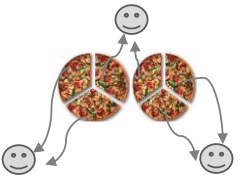
[1] Van de Walle

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

زیرساختار خارج قسمت:

ایدهٔ اصلی این زیرساختار، تقسیم مساوی یک مقدار بین چند دسته است. کسر به تعبیر خارج قسمت، عددی است که سهم هر دسته را در این تقسیم نشان می‌دهد. صورت این کسر، مقدار اولیه و مخرج آن تعداد نفرات یا دسته‌ها است.

در تصویر ۳، دو پیتزا بین سه نفر به طور مساوی تقسیم شده و سهم هر نفر $\frac{2}{3}$ یک پیتزا شده است.



تصویر ۳ - نمایش کسر $\frac{2}{3}$ به تعبیر خارج قسمت

مامد و همکاران (۲۰۰۵) تاکید می‌کنند که باید ارتباطی معناداری بین مخرج به عنوان تقسیم کننده (مقسوم علیه) و صورت به عنوان مقسوم شکل بگیرد و به جای آن که این دو کمیت به صورت مستقل و جداگانه در نظرگرفته شوند.

تقسیم برابر بین چند نفریا چند دسته (تقسیم شراکتی) ، نقش مهمی در درک زیرساختار خارج قسمت ایفا می‌کند ، درست همانند زیرساختارهای جزء-کل و اندازه‌گیری (سودر، فیلیپ و همکاران، ۱۹۹۸). البته در زیرساختار خارج قسمت، ایده تقسیم عادلانه و شراکتی، بیشتر از دو زیرساختار اشاره شده فهمیده و احساس می‌شود چون به صورت صریح و مستقیم گفته می‌شود که کل قرار است بین چند نفر (دسته) تقسیم شود، به عبارتی دیگر، لزوم تقسیم بندی مساوی در زیرساختار

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

تقسیم بیشتر از زیرساختار جز-کل درک می‌شود. بنابراین با تکیه بر دانش غیر رسمی کودکان(کیپرن ۱۹۹۲)، می‌توان از این زیرساختار در ابتدای درک مفهوم کسر استفاده بهینه‌ای کرد.

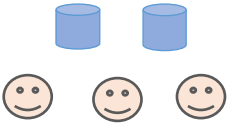
برخلاف زیرساختار جزء-کل که از یک فضای اندازه‌گیری برای صورت و مخرج اسفاده می‌شود، زیر ساختار خارج قسمت ممکن است دو فضای اندازه‌گیری متفاوت را شامل شود (مثلا ۳ تا **شکلات** بین ٤ **دوست** تقسیم برابر می‌شود) (لامون ۲۰۲۰).

زیرساختار نسبت:

مقایسهٔ دو مقدار (کمیت) با یک ترتیب معین با زیرساختار نسبت توصیف می‌شود (لامون، ۲۰۲۰، بهر و همکاران، ۱۹۸۳، چارالامبوز[1] و پانتازی[2]، ۲۰۰٦).

کسر به تعبیر نسبت عددی است که ارتباط میان دو مقدار را نشان می‌دهد. صورت این کسر یکی از این دو مقدار و مخرج کسر مقدار دیگر است. دو مقدار در یک نسبت می‌توانند از یک جنس، یا از دو جنس متفاوت باشند.

مثلا در تصویر ۲، نسبت تعداد صندلی‌ها به تعداد دانش‌آموزان ، ۲ به ۳ یا $\frac{2}{3}$ است.



تصویر ٤ - نمایش کسر $\frac{2}{3}$ به تعبیر نسبت

[1] Charalambous
[2] Pantazi

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

برای تسلط فراگیران بر زیرساختار نسبت، لامون (۲۰۰۵) و مارشال (۱۹۹۳) پیشنهاد می‌کنند که آن‌ها باید ابتدا بتوانند ایده مقادیر نسبی، یعنی مقایسه دو قسمت از یک مجموعه (مقایسه جزءجزء) یا دو مقدار متفاوت از دو مجموعه را با هم مقایسه کنند (مثلا مقدار شهد شربت به مقدار آب را). در ادامه باید ارتباط بین دو مقدار را درک کنند و این نکته را در نظر داشته‌باشند که چون دو مقدار با هم تغییر می‌کنند ارتباط بین آن‌ها همچنان ثابت می‌ماند. ضمنا متوجه باشند که وقتی دو مقدار در یک عدد غیر صفر یکسان ضرب می‌شوند، مقدار نسبت ثابت می‌ماند.

زیرساختار نسبت، به ایجاد و توسعه قوی و پایدار مفاهیم کسرهای برابر و تناسب کمک می‌کند (بهر و همکاران، ۱۹۸۳، کیبرن، ۱۹۹۳). ولی برخلاف زیرساختارهای جزء-کل و خارج قسمت، این زیرساختار بر مفهوم تقسیم برابر متمرکز نیست (رِیز[1] و همکاران، ۲۰۱۲).

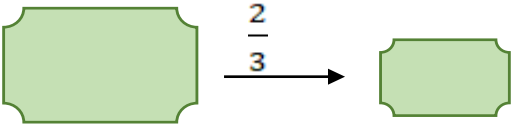
زیرساختار عملگرا:

در این زیرساختار، کسر $\frac{a}{b}$ تابعی (تبدیلی) است که روی یک عدد، یک مجموعه و یا اشیاء اثر می‌کند و آن را b برابرکوچک (کم) و a برابر بزرگ (زیاد) می‌کند. این دو عمل پشت هم یعنی «تقسیم یک مقدار بر یک عدد صحیح(غیر صفر)» و سپس «ضرب حاصل این تقسیم در عددی صحیح» را می‌توان با یک عملگر یک مرحله‌ای ضربی به شکل کسر نشان داد. صورت این کسر، عددی است که ضرب شده و مخرج آن، عددی است که بر آن تقسیم شده است.

[1] Reys

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

مثلا در تصویر ۵، کسر $\frac{2}{3}$ روی تصویر A اثر می کند و تصویر B حاصل می‌شود.



تصویر ۵- نمایش کسر $\frac{2}{3}$ به تعبیر عملگر

یا $\frac{2}{3}$ از یک جمعیت ۳۰۰ نفری در یک محله، ۲۰۰ نفر خواهد بود.

این زیرساختار معمولا زمانی معرفی معرفی و استفاده می‌شوند که دانش‌آموزان تعبیرهای دیگر را به خوبی درک کرده باشند و استفاده از کسر و مشخصا عمل ضرب روی آن را بشناسند (لامون، ۲۰۰۵، نقیبی، مهدخت و همکاران، ۱۴۰۱).

کسر در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی

کتاب‌های درسی ریاضیات نقش کلیدی در حمایت از یادگیری دانش‌آموزان و کمک به معلمان برای آموزش ریاضیات دارند(کای[1] و نی[2] ۲۰۱۱؛ شیلد[3] و دال[4] ۲۰۱۳؛ استین[5] و همکاران): این کتاب‌ها نه تنها بر محتوای ارائه شده و آموزش معلم نقش دارند، بلکه بر دانش دانش‌آموزان و روش‌های حل مسئله آنان نیز تأثیر می‌گذارد (کای و نی ۲۰۱۱؛ نیکول[6] و کرسپو[7] ۲۰۰۶). علاوه بر این، کیفیت کتاب های درسی ریاضی بر یادگیری دانش آموزان و عملکرد در پیشرفت ریاضیات تأثیر می‌گذارد. مطالعه ریس[8]، ریس و چاوز[1] (۲۰۰۴) نشان داد که طراحی کتاب های

[1] Cai
[2] Ni
[3] Shield
[4] Dole
[5] Stein
[6] Nicole
[7] Crespo
[8] Reys

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

درسی ریاضیات می‌تواند بر راهبردهای آموزشی معلمان تأثیر بگذارد که این به نوبه خود بر نتایج یادگیری دانش‌آموزان تأثیر گذار است. مطالعات دیگر همچنین نشان دادند که سبک‌ها یا ویژگی‌های محتویات ریاضی ارائه‌شده در کتاب‌های درسی بر فرصت‌های یادگیری دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد (کای و نی ۲۰۱۱؛ استین، رمیلارد و اسمیت ۲۰۰۷). بنابراین، کتاب درسی نقش بسیار مهمی در آموزش مدرسه و یادگیری دانش آموزان دارد.

مطالعه‌ی برنامه‌ی درسی ریاضی و کتاب‌های درسی کشورهای مختلف نشان می‌دهد صرف نظر از نوع تقسیم‌بندی موضوعات مرتبط با کسر در پایه‌های مختلف تحصیلی، این مفهوم بخش عمده‌ای از برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای اغلب کشورها را به خود اختصاص داده است. این خود، نشانه‌ی اهمیت و پیچیدگی این مفهوم است. مفاهیم مرتبط با کسر در کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی عمدتاً شاملِ تعابیر و نمایش‌های مختلف کسر، کسرهای برابر، مقایسه‌ی کسرها، عملیات (+، − ،×، ÷) کسرها، اعداد مخلوط و اعداد اعشاری و عملیات روی آن‌ها، نسبت، تناسب، درصد و احتمال است.

برای آشنایی بیشتر با جایگاه «کسر» در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای ایران، سرفصل «کسر» در کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های مختلف تحصیلی ابتدایی را مرور می‌کنیم.

«کسر» در پایه های مختلف تحصیلی دوره ابتدایی در ایران

اولین معرفی رسمی‌مفهوم کسر در پایه‌ی دوم ابتدایی (بدون استفاده از نماد کسر) آغاز شده و از آن برای معرفی مفهوم احتمال در فصل کسر و احتمال استفاده می‌شود. در پایه‌ی سوم، موضوعات مرتبط با کسر شامل آشنایی با نمایش عددی (نمادین) کسر، اندازه‌گیری با استفاده از تبدیل واحد به زیر واحد، کسرهای برابر و

[1] Chavez

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

مقایسه‌ی کسرها در فصل عددهای کسری و همچنین مبحث احتمال در فصل آمار و احتمال، است که مطرح می‌شود.

عملیات در کسرها مانند جمع و تفریق و حالت خاصی از ضرب در فصل کسر ، اندازه‌گیری طول در فصل اندازه‌گیری، آشنایی با عددهای مخلوط، آشنایی با عددهای اعشاری، جمع و تفریق آن‌ها و ارزش مکانی عددهای اعشاری در فصل عدد مخلوط و عدد اعشاری و احتمال در فصل آمار و احتمال در پایه‌ی چهارم ابتدایی آمده است. کسرهای بزرگ‌تر از واحد، جمع و تفریق اعداد مخلوط، ضرب و تقسیم کسرها و ضرب اعداد مخلوط در فصل کسر و نسبت، نسبت‌های مساوی، تناسب ، درصد در فصل نسبت و تناسب و درصد و ادامه جمع و تفریق اعداد اعشاری و ضرب آن‌ها در فصل اعداد اعشاری و احتمال در فصل آمار و احتمال در پایه‌ی پنجم و بالاخره، ادامه جمع و تفریق کسرها، ضرب و تقسیم آن‌ها، محاسبات با کسر در فصل کسر ، تقسیم بر اعداد اعشاری در فصل اعداد اعشاری و تناسب، درصد و کاربرد آن در محاسبات مالی و آمار و احتمال در فصل تناسب و درصد، موضوعات جدید مرتبط با مفهوم کسر هستند که در پایه‌ی ششم ابتدایی معرفی می‌شوند[1].

ساختار کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی

کتاب درسی ریاضی ابتدایی در هر پایه مشتمل بر تعدادی فصل است. ذیل هر فصل، زیرفصل‌هایی وجود دارند که هرکدام یک درس محسوب می‌شوند. هر درس شامل، فعالیت، کار در کلاس و تمرین است. در طراحی فعالیت ها به منظور ایجاد فرصت هایی برای یادگیری معنی دار انجام شده است. هدایت فعّالیت ها به عهده معلّم است و هر جا که لازم باشد، معلّم راهنمایی لازم را ارائه خواهد کرد. کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی، تعمیم یادگیری طرّاحی شده و انتظار این است که دانش آموزان بیشترین سهم را در انجام آن داشته باشند.

[1] این موضوعات براساس کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی در سال ۱۴۰۱ نوشته شده است.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

تمرین‌ها به عهده دانش آموزان است؛ امّا ضرورت دارد که معلّم زمینه را برای طرح پاسخ ها و بررسی آنها در کلاس فراهم سازد (امیری ۱۳۹۵).

روش و ابزار پژوهش

تحلیل محتوا

روش تحلیل محتوا یکی از پرکاربردترین روش‌های تحقیق در مطالعات علوم اجتماعی و انسانی است. کریپندورف (۲۰۰٤)، تحلیل محتوا را به عنوان یک روش پژوهش برای دستیابی به نتایج معتبر و قابل تکرار از بدنه یک نوشتار تعریف می‌کند.

نظام آموزشی فعلی کشور، یک نظام متمرکز و برنامه درسی آن منحصر به کتاب درسی است که در کل کشور استفاده می‌شود (مشایخ ۱۳۷۵ به نقل از جعفری هرندی، رضا و همکاران ۱۳۸۷)، بنابراین کتاب درسی مهم‌ترین ابزار آموزش و دربردارنده محتوای برنامه درسی است. از این رو بررسی محتوای درسی، به منظور شناسایی نقاط قوت و ضعف کتاب‌های درسی و اصلاح آن، امری ضروری است. یکی از روش‌های مناسب برای بررسی محتوای کتاب‌های درسی، روش تحلیل محتواست.

در این مطالعه، با توجه به هدف پژوهش، روش تحقیق، تحلیل محتوا انتخاب شد. این تحلیل محتوا، بر اساس چارچوب نظری زیرساختارهای کسر شامل « *جزء-کل، اندازه‌گیری، خارج قسمت، نسبت و عملگر*»، تبیین شده توسط کیرن (۱۹۸۰)، انجام شده است. مراحل اولیه این تحلیل، ٦ ماه قبل از اجرای فراگیر این پژوهش، به صورت آزمایشی طراحی و اجرا شد. با انجام اصلاحاتی در تعیین جامعه پژوهشی، مقوله‌ها و واحد ثبت، مراحل این تحلیل بازطراحی شد که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

ابتدا تمامی کتابهای ریاضی شش پایه ابتدایی برای این پژوهش تعیین گردید اما به دلیل آن که کتاب پایه اول دبستان، فصلی مرتبط با موضوع کسر نداشت، این پایه

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

از جامعه آماری پژوهش حذف شد وتنها کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های دوم تا ششم دوره ابتدایی چاپ سال ۱۴۰۰ به عنوان جامعه آماری در این پژوهش، تعریف شدند. واحد زمینه، فصل‌های مرتبط با مفهوم کسر در کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های دوم تا ششم دوره ابتدایی و واحد تحلیل تمامی فعالیت‌ها و مسائلی و تکالیفی است که در متن اصلی درس، یعنی فعالیت‌ها، کار در کلاس و تمرین‌ها وجود دارد. مقوله‌ها در این تحلیل بر اساس چارچوب نظری، ۵ زیرساختارهای کسر : *جزء-کل، اندازه‌گیری، نسبت،خارج‌قسمت و عملگر* انتخاب شدند. جداولی برای مشخص کردن فراوانی و درصد میزان استفاده از این زیرساختارها درفصل‌های مرتبط با کسر در کتاب ریاضی برای هر پایه طراحی و تنظیم شد. سپس واحدهای تحلیل، با توجه به این پنج زیرساختار (مقوله‌ها) بررسی، کد گذاری و شمارش شد. این فرآیند توسط محقق و در دو زمان متفاوت، با فاصله زمانی سه ماه انجام شدند. میزان توافق بین این دو کدگذاری، نشان دهنده پایایی نتایج کدگذاری بود.

توجه به نکات مهم زیر در این تحلیل ضروری است:

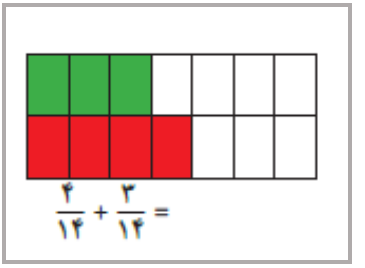
– همان طور که قبلا اشاره شد، کسرها در موقعیت‌های مختلف، معانی متفاوتی می‌دهند که به آن تعبیر یا زیرساختار می‌گوییم. بنابراین در این تحلیل، *زمینه‌ی*[1] هر واحد (فعالیت، تمرین،...) نقش مهمی در تخصیص مقوله‌ها (زیرساختارها) به آن واحد دارد.

– هر یک از واحدهای تحلیل در صورتی مقوله‌بندی و کدگذاری شده‌است که به طور واضح و مشخص، بر زیرساختاری از کسر دلالت کنند. مثلا در ضرب کسرها، در صورتی فعالیت مورد نظر در مقوله عملگر قرار می‌گیرد که کاملا مشخص باشد زمینه مسئله (فعالیت) و یا یک بازنمایی تصویری مرتبط با آن، تعبیری از نوع عملگر را القا می‌کند، درحالی‌که ضرب دو عدد کسری به صورت جبری، بر تعبیر خاصی دلالت ندارد. همین مسئله در مورد تقسیم کسرها و مفاهیم مشابه صدق

[1] context

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

می‌کند. البته دلالت بر یک تعبیر می‌تواند *ابتدایی* باشد، مثلا در فعالیتی خواسته شده یک دایره را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنند و سپس دو قسمت آن را رنگ کنند (زیرساختار جز کل)، یا *پیشرفته*، مثل فعالیت در تصویر ٦ که برای جمع دو کسر، از زیرساختار جز-کل استفاده شده است (هر یک از کسرها و حاصل جمع آن‌ها به زیرساختار جز-کل نمایش داده شده است).



تصویر ٦- کار در کلاس۱، صفحه ۳۱، چهارم دبستان

- باید توجه داشت برای برخی از موقعیت‌ها یا مسائل ارائه شده در بخش مفاهیم پیچیده‌تر مرتبط با کسر (درصد، تناسب و اعداد اعشاری و ..) ممکن است نتوان زیرساختار خاصی را تخصیص داد. به دو دلیل، اول آن‌که استفاده از زیرساختارها معمولا در ابتدای فرآیند درک مفهوم کسر و برای عمیق‌تر شدن و تسلط همه جانبه بر موضوع کسر انجام می‌گیرد. برای مفاهیم پیچیده‌تر، فرض کتاب و مولفان بر این است که دانش‌آموزان به درک مناسبی از مفاهیم اولیه و ضروری کسر نائل شده‌اند، بنابراین فعالیت‌ها و مسائل به گونه‌ای طرح شده‌اند که هیچ زیرساختار خاصی را تداعی نمی‌کنند. دوم آن‌که ممکن است این مسائل، چون بر مفاهیم پیچیده‌تری تکیه دارند، همزمان چند زیرساختار را به طور ضمنی شامل شوند (مثلا برخی از مسائل درصد که ممکن است همزمان و غیر مستقیم، به سه زیرساختار جزء-کل، نسبت و عملگر اشاره کنند).

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

– تقسیم مساوی، از مفاهیم پیش‌نیاز برای درک بسیاری از زیرساختارهای کسر مثل جز–کل، نسبت، خارج قسمت و اندازه‌گیری است. بنابراین تمرین یا فعالیتی که تنها بر این مفهوم متمرکز باشد مقوله‌بندی نمی‌شود.

– مفهوم زیرساختار خارج قسمت، که بعضی به آن زیرساختار تقسیم می‌گویند، با تقسیم کسرها کاملا متفاوت هستند، حتی از نظر جبری (مثلا $\frac{2}{3}$ در مقایسه با $\frac{1}{4} \div \frac{2}{3}$). دیده شده در برخی مطالعات، تقسیم کسری را زیرساختار خارج قسمت معنا می‌کنند.

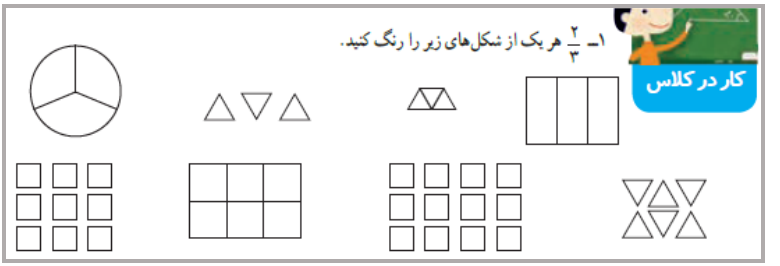
– گاهی یک فعالیت یا تمرین در کتاب خود مشتمل بر چند زیرفعالیت یا زیرتمرین است. در این تحلیل، این زیرفعالیت‌ها و یا زیر مسائل به عنوان یک واحد مستقل درنظر گرفته شدند. این تصمیم به این دلیل اتخاذ شد که این زیرفعالیت‌ها و یا زیرتمرین‌ها هریک گاها، بر یک زیرساختار متفاوت دلالت داشتند.

– یک نکته مهم دیگر در این تحلیل این است که هر واحد، باید با توجه به پیش‌آموخته‌های دانش‌آموز (دانش قبلی)، تحلیل شود و نه به طور مستقل. مثلا کار در کلاس زیر (تصویر ۷)، به طور مستقل زیرساختار عملگر را تداعی می‌کند، ولی چون دانش‌آموز هنوز با مفهوم ضرب کسرها آشنا نشده، با توجه به فعالیت‌ها وتمرین‌های قبلی و دروسی که تا به این جا آموخته، برای انجام این تکلیف، دانش‌آموز همانند تمرین قبلی (تصویر ۸) به سمت استفاده از زیرساختار جز–کل هدایت می‌شود.

۲ـ $\frac{۱}{۳}$ از ۲۴ دانش‌آموز کلاس به رشته‌ی والیبال علاقه دارند. در این کلاس، چند دانش‌آموز به والیبال علاقه دارند؟

تصویر۷– کار در کلاس ۲، صفحه ۳۵، چهارم دبستان

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]



تصویر ۸- کار در کلاس۱، صفحه ۳۵، چهارم دبستان

- برای انجام بعضی تکالیف، دقیقا مشخص نیست راه حل دانش‌آموز منطبق با کدام زیرساختار است. بنابراین نمی‌توان این تکالیف را در مقوله خاصی قرار داد (مثل نمونه پایین در تصویر ۳ که با توجه به تمرینات و فعالیت‌های قبلی، می‌تواند برای پاسخ دادن به سوال از هر دو تعبیر جز-کل و اندازه‌گیر استفاده کند). مگر این که تکلیف خواسته‌شده به دنبال انجام یکسری تکالیف مشابه باشد که همگی دلالت بر زیرساختار خاصی داشته‌باشند.

۲ـ $\frac{۱}{۷}$ محصول یک کارخانه‌ی قند به استان گیلان و $\frac{۲}{۷}$ آن به استان مازندران حمل شد. چه کسری از محصول این کارخانه به این استان‌ها حمل شده است؟

تصویر ۹- کار در کلاس۱، صفحه ۳۵، چهارم دبستان

گزارش یافته‌ها

در راستای هدف پژوهش، فصل‌های مرتبط با کسر در کتاب‌های ریاضی پایه‌های دوم تا ششم دوره ابتدایی، با روش تحلیل محتوا و با استفاده از چارچوب نظری زیرساختارهای کیپرن (۱۹۸۰) یعنی *جزء-کل*، *اندازه‌گیری*، *نسبت*، *خارج‌قسمت* و *عملگر*، تحت عنوان مقوله‌های تحلیل، مورد بررسی قرار گرفتند تا وجود این

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

زیرساختارها و همچنین میزان استفاده از هر کدام در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی مشخص شوند. واحد تحلیل، همان طور که قبلا اشاره شد، تمامی فعالیت‌ها و مسائل و تکالیفی در نظر گرفته‌شد که در متن اصلی درس، یعنی فعالیت‌ها، کار در کلاس و تمرین‌ها وجود داشت. این واحدها با توجه به مقوله‌های تحلیل، بررسی شد و از آن‌ها، موقعیت‌هایی که منطبق با یکی از این زیرساختارها بودند با دقت مشخص، طبقه‌بندی و شمارش شدند. جداول ۲ تا ٦ ، فراوانی و درصد استفاده از هر یک از این زیرساختارها را، به تفکیک پایه تحصیلی و فصل‌های مرتبط با کسر مشخص می‌کنند. جدول ٦ در انتها، یک شمای کلی از میزان استفاده از هر یک از این زیرساختارها را در کل کتاب‌های ریاضی پایه دوم تا ششم ترسیم می‌کند.

پایه دوم:

پایه دوم	جز-کل ❋		اندازه‌گیری❋		نسبت		خارج‌قسمت		عملگر		تعداد کل زیرساختارها
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
فصل۷: کسر و احتمال	۳۷	۸۰٪	۹	۲۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۴۶
مجموع	۳۷	۸۰٪	۹	۲۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۴۶

جدول ۱- فراوانی و درصد میزان استفاده از زیرساختارها درفصل‌های مرتبط با کسر در کتاب ریاضی پایه دوم

با توجه به نقش اساسی مفهوم کسر در احتمال، در شروع فصل ۷ از کتاب ریاضی پایه دوم، برای اولین بار به معرفی مفهوم کسر به صورت رسمی و بدون استفاده از نمادهای کسری پرداخته می‌شود. زیرساختارهای جزء-کل و اندازه‌گیری اولین بار در این فصل معرفی و مطرح می‌شوند. مطابق جدول ۱، بیشتر موقعیت‌های یادگیری در واحد تحلیل در این پایه، بر زیرساختار جزء-کل متمرکز هستند (۸۰٪) و تعداد کمتری بر زیرساختار اندزه‌گیری دلالت دارند(۲۰٪). البته زیر ساختار اندازه‌گیری شباهت زیادی به

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

زیرساختار جزء–کل دارد : تقسیم کل یا واحد به قسمت‌ها یا جزءهای برابر و مشخص کردن تعدادی از این قسمت‌ها یا جزءها. تفاوت اصلی این دو زیرساختار اما در این است که در تفسیر جزء–کل، برای مقایسه تعداد متفاوتی از جزءهای یک کل، لازم است واحد یا کل، به تعداد ثابتی از قسمت‌های برابر تقسیم شود. در مقابل، در زیر ساختار اندازه گیری تعداد قسمت های مساوی در واحد ممکن است تغییر کند و نام گذاری مقدار کسری بستگی به این دارد که چند بار فرآیند تقسیم برابر انجام شده است. (لامون، ۲۰۰۵؛ ون دو وال و همکاران، ۲۰۱۳).

پایه سوم:

پایه سوم	جز–کل		اندازه‌گیری		نسبت		خارج‌قسمت		عملگر		تعداد کل زیرساختارها
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
فصل۳: عددهای کسری	۶۴	۷۲٪	۲۵	۲۸٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۸۹
فصل۷: آمار و احتمال	۲۴	۱۰۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۲۴
مجموع	۸۸	۷۸٪	۲۵	۲۲٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۱۱۳

جدول ۲- فراوانی و درصد میزان استفاده از زیرساختارها درفصل‌های مرتبط با کسر در کتاب ریاضی پایه سوم

موضوعات مرتبط با کسر در فصل ۳ شامل آشنایی با نمایش عددی (نمادین) کسر، اندازه‌گیری با استفاده از تبدیل واحد به زیر واحد، کسرهای برابر و مقایسه‌ی کسرها و در فصل ۷، مبحث احتمال هستند. در این پایه زیرساختار جدیدی معرفی نشده و همچنان واحدهای تحلیل در مقوله‌های جزء–کل و اندازه‌گیری قرار می‌گیرند. در فصل عددهای کسری، ٦٤٪ از موقعیت‌ها به تعبیر جزء–کل و ۲۸٪ به تعبیر اندازه‌گیری اختصاص یافته است. در فصل آمار و احتمال، تنها تعبیر استفاده شده جزء–کل می‌باشد.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

در اکثر این موقعیت‌های فصل ۳ (۸۳ فعالیت از ۸۹ تا یا ۹۳٪ از فعالیت‌های تحلیل شده)، کل یا واحد، از پیش به قسمت‌های برابر تقسیم شده است. در برخی از این فعالیت‌ها، تعدادی از قسمت‌ها نیز انتخاب (رنگ) شده و از دانش‌آموز انتظار می‌رود تنها کسر متناظر با شکل را بنویسد. در برخی دیگر، کسری داده شده و دانش‌آموز لازم است تعدادی از این قسمت‌های برابر را متناسب با کسر داده شده رنگ کند.

پایه چهارم:

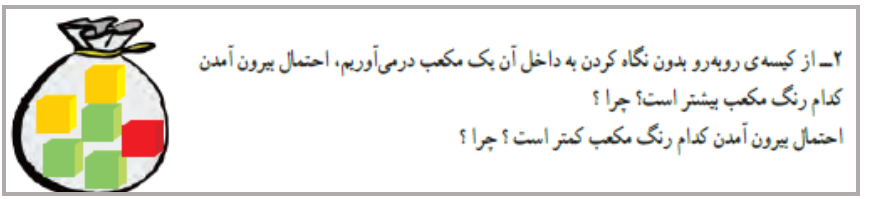
پایه چهارم	جز-کل		اندازه‌گیری		نسبت		خارج‌قسمت		عملگر ❋		تعداد کل زیرساختارها
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
فصل۲: کسر	۱۰۲	۸۱٪	۷	۶٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۱۷	۱۳٪	۱۲۶
فصل٤: اندازه‌گیری	۱۲	۱۰۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۱۲
فصل ۵: عدد مخلوط و عدد اعشاری	۱۱	۱۸٪	۵۰	۸۲٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۶۱
فصل۷: آمار و احتمال	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰
مجموع	۱۲۵	۶۳٪	۵۷	۲۹٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۱۷	۸٪	۱۹۹

جدول ۳- فراوانی و درصد میزان استفاده از زیرساختارها درفصل‌های مرتبط با کسر در کتاب ریاضی پایه چهارم

در کتاب ریاضی پایه چهارم، عملیات در کسرها مانند جمع و تفریق و حالت خاصی از ضرب (در فصل کسر) ، اندازه‌گیری طول (در فصل اندازه‌گیری)، آشنایی با عددهای مخلوط، آشنایی با عددهای اعشاری، جمع و تفریق آن‌ها و ارزش مکانی عددهای اعشاری (در فصل عدد مخلوط و عدد اعشاری) و احتمال (در فصل آمار و احتمال) مرتبط با مفهوم کسر هستند. سه زیرساختار جزء-کل، اندازه‌گیری و عملگر در این پایه نقش ایفا می‌کنند. در این پایه، زیرساختار عملگر برای اولین بار به طور ضمنی مطرح

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

می‌شود(در فصل ۲ ، بخش ضرب کسرها). هر چند در این فعالیت‌ها عدد صحیح در کسر ضرب می‌شود ولی تعبیر، تعبیر عملگر است که در آن کسر با مخرج ۱ روی مقداری اثر می‌کند. در اکثر فصل‌ها، زیرساختار جزء-کل همچنان پیشتاز است. تنها در فصل ۵ (بخش عدد اعشاری) که در آن برای نمایش عدد اعشاری از کسر با مخرج ده استفاده می‌شود، میزان استفاده از زیرساختار اندازه‌گیری از زیرساختار جزء-کل پیشی می‌گیرد. در فصل ۷ (بخش احتمال)، با این که در اکثر سوالات و فعالیت‌ها از دانش‌آموزان خواسته شده احتمال وقوع یک پیشامد را با عبارت‌هایی مثل احتمال بیشتر، احتمال کمتر و احتمال برابر مشخص کنند ولی لازم نبوده که احتمال را به صورت کسری محاسبه کنند (تعداد حالت‌های مطلوب به حالت‌های ممکن). بنابراین برای پاسخ به سوالات در این بخش، دانش‌آموز تنها کافی است تعداد قسمت‌های مطلوب را با تعداد بقیه حالت‌ها مقایسه کند بدون این که بر تعداد کل حالت‌های ممکن، تاکیدی داشته باشد. لذا این موقعیت‌ها بر زیرساختار جز کل نیز دلالت نمی‌کنند. مثلا در مثال زیر (تصویر ۱۰)، دانش‌آموز تنها تعداد مکعب‌ها را با هم مقایسه می‌کند و به این نتیجه می‌رسد که احتمال بیرون آوردن مکعب سبز بیشتر است چون تعداد آن در مقایسه با تعداد مکعبهای سبز و زرد بیشتر است.



تصویر ۱۰- کار در کلاس ۲، صفحه ۱۴۹، کتاب ریاضی پایه چهارم

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

پایه پنجم:

پنجم	جز-کل		اندازه‌گیری		نسبت *		خارج‌قسمت *		عملگر		تعداد کل زیرساختارها
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
فصل۲: کسر	۱۵	۲۵٪	۱۵	۲۵٪	۰	۰٪	۴	۷٪	۲۶	۴۳٪	۶۰
فصل۳: نسبت، تناسب و درصد	۹	۱۳٪	۳	۴٪	۵۶	۸۲٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۶۸
فصل ۵: عددهای اعشاری	۳	۱۶٪	۱۴	۷۴٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۲	۱۱٪	۱۹
فصل۶: اندازه‌گیری	۱	۱۰۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۱
فصل۷: آمار و احتمال	۳	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۳
مجموع	۳۱	۲۰٪	۳۲	۲۱٪	۵۶	۳۷٪	۴	۳٪	۲۸	۱۸٪	۱۵۱

جدول ٤- فراوانی و درصد میزان استفاده از زیرساختارها درفصل‌های مرتبط با کسر در کتاب ریاضی پایه پنجم

موضوعات مرتبط با کسر در پایه پنجم شامل کسرهای بزرگ‌تر از واحد، جمع و تفریق اعداد مخلوط، ضرب و تقسیم کسرها و ضرب اعداد مخلوط (در فصل کسر)، نسبت‌های مساوی، تناسب ، درصد (در فصل نسبت و تناسب و درصد) و ادامه جمع و تفریق اعداد اعشاری و ضرب آن‌ها (در فصل اعداد اعشاری) و احتمال (در فصل آمار و احتمال) هستند.

در این پایه، دو زیرساختار نسبت و خارج قسمت برای اولین بار در فعالیت‌ها و مسائل نمایان می‌شوند. در اکثر موقعیت‌ها و فعالیت‌های فصل کسر (بخش ضرب کسرها)، ضرب کسر در یک مقدار (می‌تواند عدد صحیح یا کسری باشد) به طور

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

واضح تعبیر عملگر کسرها را تداعی می‌کند. تعبیر خارج قسمت تنها در سه موقعیت، مطرح شده است (در فصل کسرها، بخش تقسیم کسرها). ایده این فعالیت‌ها دقیقا تقسیم مساوی یک مقدار بین چند نفراست. حاصل تقسیم، سهم هر نفر را در این تقسیم نشان می‌دهد. در فصل ۳، مفهوم نسبت به طور رسمی معرفی و در اکثر موقعیت‌ها و فعالیت‌ها استفاده شده است. این زیرساختار، بیشترین (۳۷٪) و زیرساختار خارج‌قسمت کمترین (۳٪) میزان استفاده را در این پایه دارند.

پایه ششم:

ششم	جز-کل		اندازه‌گیری		نسبت		خارج‌قسمت		عملگر		تعداد کل
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	زیرساختارها
فصل۲: کسر	۸	۳۱٪	۲	۸٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۱۶	۶۲٪	۲۶
فصل ۳: اعداد اعشاری	۱۴	۷۸٪	۴	۲۲٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۰	۰٪	۱۸
فصل٦: تناسب و درصد	۴۲	۴۱٪	۵	۵٪	۵۲	۵۰٪	۰	۰٪	۴	۴٪	۱۰۳
مجموع	۶۴	۴۳٪	۱۱	۷٪	۵۲	۳۵٪	۰	۰٪	۲۰	۱۴٪	۱۴۷

جدول ۵- فراوانی و درصد میزان استفاده از زیرساختارها درفصل‌های مرتبط با کسر در کتاب ریاضی پایه ششم

در پایه ششم، ادامه جمع و تفریق کسرها، ضرب و تقسیم آن‌ها، محاسبات با کسر (در فصل کسر) ، تقسیم بر اعداد اعشاری (در فصل اعداد اعشاری و تناسب)، درصد و کاربرد آن در محاسبات مالی و آمار و احتمال (در فصل تناسب و درصد)، موضوعات جدید مرتبط با مفهوم کسر هستند که معرفی می‌شوند. زیرساختار عملگر بیشتر در

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

فصل کسر، خصوصا بخش ضرب و تقسیم کسرها، استفاده شده است(٦٢٪). در فصل نسبت و تناسب، این زیرساختار نسبت است که در مقایسه با سایر زیرساختارها، پیشتاز است (۵۰٪)، زیرساختار جزء-کل هم در این پایه سهم قابل توجهی را به خود اختصاص داده است (٤١٪). در این پایه، زیرساختار خارج قسمت اصلا استفاده نشده است.

کل پایه‌ها:

پایه	جز-کل			اندازه‌گیری			نسبت			خارج‌قسمت			عملگر			تعداد کل
	فراوانی	درصد	معرفی	فراوانی	درصد	معرفی	فراوانی	درصد	معرفی	فراوانی	درصد	معرفی	فراوانی	درصد	معرفی	زیرساختارها
دوم	۳۷	۸۰٪	❊	۹	۲۰٪	❊	۰	۰٪		۰	۰٪		۰	۰٪		۴۶
سوم	۸۸	۷۸٪		۲۵	۲۲٪		۰	۰٪		۰	۰٪		۰	۰٪		۱۱۳
چهارم	۱۲۵	۶۳٪		۵۷	۲۹٪		۰	۰٪		۰	۰٪		۱۷	۹٪	❊	۱۹۹
پنجم	۳۱	۲۱٪		۳۲	۲۱٪		۵۶	۳۷٪	❊	۴	۳٪	❊	۲۸	۱۹٪		۱۵۱
ششم	۶۴	۴۴٪		۱۱	۷٪		۵۲	۳۵٪		۰	۰٪		۲۰	۱۴٪		۱۴۷
مجموع	۳۴۵	۴۹٪		۱۳۴	۲۲٪		۱۰۸	۱۶٪		۴	۱٪		۶۵	۱۱٪		۶۵۶

جدول ٦ - فراوانی و درصد میزان استفاده از زیرساختارها درفصل‌های مرتبط با کسر در کتاب‌های ریاضی پایه دوم تا ششم

مطابق تحلیل انجام شده در فصل‌های مرتبط با کسر در کتاب‌های پایه دوم تا ششم، مجموعا ٦٥٦ واحد تحلیل که شامل فعالیت‌ها، تمرین‌ها و مسائل در بخش‌های «فعالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین» بود، اشاره به زیرساختارهای کسر (کیبرن ۱۹۸۰) داشتند. مطابق جدول ٦، زیرساختار جزء-کل بیشترین میزان استفاده را به خود اختصاص می‌دهد (٤٩٪). این زیرساختار تقریبا در اکثر فصل‌های مرتبط با کسر در تمامی پایه‌های ۲ تا ٦ به طور برجسته‌ای نمایان است. زیرساختار خارج قسمت از میان این زیرساختارها، سهم بسیار کوچکی در کتاب‌های درسی در این پایه‌ها دارد (۱٪).

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

زیرساختارهای «جزء-کل» و «اندازه‌گیری» در پایه دوم، «عملگر» در پایه چهارم و «نسبت» و «خارج قسمت» در پایه پنجم در قالب تمرین‌ها و فعالیت‌ها برای اولین بار به طور واضح و مستقیم معرفی و استفاده می‌شوند.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف از انجام این پژوهش بررسی وجود زیرساختارهای کسر مطابق با تعریف کیپرن (۱۹۸۰) و میزان استفاده از هر یک از آن‌ها، در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی با استفاده از روش تحلیل محتوا است. نتایج حاصل از تحلیل محتوای فصل‌های مرتبط با کسر در کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های دوم تا ششم دوره ابتدایی با استفاده چارچوب نظری نشان داد که زیرساختار *جزء-کل*، در فصل‌های مرتبط با کسر در پایه‌های دوم تا ششم، بیشترین میزان استفاده را داشته است. تقریبا نیمی از کل موقعیت‌های یادگیری و فعالیت‌های کدگذاری شده در این کتاب‌ها، بر زیرساختار *جزء-کل* متمرکز است. معرفی کسر با این تعبیر آغاز شده و کمابیش در تمامی پایه‌ها به آن توجه ویژه‌ای شده است. میزان استفاده از این زیرساختار تقریبا یک روند نزولی را از پایه‌های دوم تا ششم طی کرده است.

زیر ساختار *جز-کل* احتمالاً رایج‌ترین تعبیر کسرها در مدرسه و اغلب اولین زیرساختاری است که دانش‌آموزان با آن مواجه می‌شوند (لی [1] و همکاران، ۲۰۲۱). هرچند این زیر ساختار، در درک مفهوم کسر و دیگر زیرساختارها موثر است ولی تمرکز زیاد بر این زیرساختار باعث ایجاد محدودیت‌های متعددی در توسعه مفهوم کسر می‌شود (ویلکینز[2] و نورتون[3]، ۲۰۱۸، نقیبی و همکاران ۱۴۰۱). یکی از این محدودیت‌ها، درک کسرهای بزرگتر از واحد به کمک مفهوم «تک‌جزء[4]» است (نقیبی و همکاران ۱۴۰۱).

[1] Lee
[2] Wilkins
[3] Norton
[4] Fractional part. : در تقسیم یک واحد و یا یک کل به بخش‌های مساوی، هر بخش را یک تک‌جز می‌گوییم

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

نکته مهم دیگر در مورد استفاده این زیرساختار در کتاب‌های درسی ابتدایی این است که غالبا «تفسیر ضعیف شده» این زیرساختار در فعالیت‌ها و موقعیت‌های یادگیری استفاده شده است: یکی از مفاهیم اساسی و پایه ای برای زیر ساختار جزء–کل، مفهوم *تقسیم برابر* است. برای توسعه فهم این زیرساختار، نیاز است دانش‌آموزان خود مبادرت به انجام فرآیند تقسیم برابر کل (پیوسته یا گسسته) کنند (لامون ۲۰۲۰). اما فعالیت و مسائل کتاب مرتبط با این زیرساختار در اکثر مواقع، این فرآیند را شامل نمی‌شوند: شکل های استفاده شده در این فعالیت‌ها، غالباً از قبل به قسمت‌های مساوی تقسیم شده است و وظیفه‌ی دانش‌آموز تنها شمارش قسمت‌های رنگی و یا حداکثر رنگ کردن تعدادی از این قسمت‌ها، متناظر با کسر داده شده است. این کمبود، در مورد زیرساختار *اندازه‌گیری* هم صدق می‌کند.

زیرساختار اندازه‌گیری در تمامی پایه‌ها (به جز پایه ششم) تقریبا با یک روند ثابت (حدود ۲۰٪)، در موقعیت‌ها و فعالیت‌های فصل‌های مرتبط با کسرها استفاده شده است. لامون (۲۰۲۰) معتقد است زمانی دانش‌آموزان کسرها را با تعبیر اندازه‌گیری درک می‌کنند که (الف) بتوانند به راحتی تقسیم‌بندی متوالی انجام دهند. ب) بتوانند هر تعداد کسر را بین دو کسر معین پیدا کنند و (ج) قادر به مقایسه هر دو کسر باشند. این زیر ساختار و به طور خاص کار با محور اعداد، به دانش‌اموزان کمک می‌کند که درک مفهومی از چگال بودن، ترتیب و بزرگی نسبی اعداد گویا را داشته‌باشند. برخی از پژوهشگران معتقدند که این زیرساختار، جز چالش برانگیزترین زیرساختارهاست خصوصا زمانی که استفاده از محور اعداد را شامل باشد (کارالامبوز و همکاران ۲۰۰۷). بنابراین پیشنهاد می‌شود استفاده از این زیرساختار در کتاب‌های درسی، با توجه به نکات گفته‌شده صورت گیرد و تنها محدود به پیدا کردن نقاط و یا جمع و تفریق آن‌ها روی محور اعداد، که خود از قبل به زیر واحدهایی تقسیم شده‌است، نباشد.

مفهوم *نسبت* و زیرساختار مرتبط با آن، با تاخیر زیاد و در پایه پنجم معرفی می‌شود. تنها در پایه پنجم و ششم درصد قابل توجهی از مسائل و فعالیت‌ها (حدود ۳۵٪) بر اساس این تعبیر طراحی شده‌اند. این مفهوم نقش بزرگی در ایجاد و توسعه مفاهیم دیگر

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

مثل کسرهای برابر و تناسب ایفا می‌کند (بهر و همکاران، ۱۹۸۳، کییرن، ۱۹۹۳). لامون (۲۰۲۰) معتقد است این زیرساختار به طور ساده می‌تواند زودتر معرفی شود (احتمالا در قالب مثال‌ها و فعالیت‌های ساده با توجه به تجربیات دانش‌آموزان)، چون کودکان از این مفهوم به طور طبیعی استفاده می‌کنند. هرچند که برای تسلط به این زیرساختار و درک مفاهیم پیچیده‌تر مثل تفکر نسبتی و تناسب، بنا به گفته لامون (۲۰۰۵) و مارشال (۱۹۹۳)، فراگیران باید ابتدا بتوانند ایده مقادیر نسبی، یعنی مقایسه دو قسمت از یک مجموعه (مقایسه جزءجزء) یا دو مقدار متفاوت از دو مجموعه را با هم مقایسه کنند (مثلا مقدار شهد شربت به مقدار آب). در ادامه باید ارتباط بین دو مقدار را درک کنند و این نکته را در نظر داشته‌باشند که چون دو مقدار با هم تغییر می‌کنند ارتباط بین آن‌ها همچنان ثابت می‌ماند. ضمنا متوجه باشند که وقتی دو مقدار در یک عدد غیر صفر یکسان ضرب می‌شوند، مقدار نسبت ثابت می‌ماند.

زیرساختار *عملگر*، به همراه ضرب کسرها از پایه پنجم در کتاب‌های ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد (البته در ضرب دو عدد طبیعی هم تعبیری موجود است که عدد اول به صورت عملگر (تبدیل) روی عدد دوم اثر می‌کند (ون دو وال ۲۰۱۳)). این زیرساختار معمولا زمانی معرفی و استفاده می‌شوند که دانش‌آموزان تعبیرهای دیگر را به خوبی درک کرده باشند و استفاده از کسر و مشخصا عمل ضرب روی آن را بشناسند (لامون ۲۰۰۵، نقیبی و همکاران، ۱۴۰۱).

زیرساختار *خارج قسمت*، کمترین میزان استفاده در کتاب‌های ریاضی پایه دوم تا ششم را به خود اختصاص داده است. تنها ٤ فعالیت و یا تمرین، از بین ٦٥٦ تکلیفی که بر پایه تعابیر در پایه‌های دوم تا ششم طراحی شده، به زیرساختار *خارج‌قسمت* اختصاص می‌یابد(۱٪). این زیرساختار نیز با تاخیر زیاد و در پایه پنجم ابتدایی در قالب چند فعالیت برای درک مفهوم تقسیم کسرها معرفی می‌شود. لامون (۲۰۲۰) معتقد است دانش‌آموزان به طور طبیعی از تفکر *خارج‌قسمت* از سنین پایین استفاده می‌کنند و را به تعویق انداخت. شورای معلمان ریاضی (۲۰۰۰) نیز انتظار بنابراین نباید معرفی آن

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

دارد که همه دانش‌آموزان پایه‌های ۳ تا ۵ بتوانند درک خود از مفهوم کسر را به صورت تقسیم دو عدد صحیح (تعبیر خارج‌قسمت) توسعه دهد. ایده «تقسیم بندی مساوی یا عادلانه» نقش کلیدی در درک زیرساختار خارج قسمت ایفا می‌کند و به همین دلیل لزوم آن در زیرساختار *خارج‌قسمت*، بیشتر از زیرساختارهای دیگر مثل جز-کل و اندازه‌گیری درک می‌شود. بنابراین استفاده از این تعبیر در معرفی مفهوم کسر با مثال‌های ساده (مثلا تقسیم یک لواشک مستطیلی بین دو نفر و مشخص کردن سهم هر نفر)، می‌تواند کمک به درک و توسعه مفهوم *تقسیم مساوی* باشد که خود، اساس و پایه اکثر زیرساختارهای کسر است (نقیبی و همکاران، ۱۴۰۱). پورنومو[1] و همکاران (۲۰۲۱) در مطالعه خود، پیشنهاد می‌کنند که از زیرساختار خارج‌قسمت برای معرفی کسر به عنوان اولین زیرساختار استفاده شود. آن‌ها ادعا می‌کنند که زیرساختار جزءکل که در اکثر کتاب‌های درسی برای معرفی مفهوم کسر به کار برده می‌شود، برای پایه‌ریزی این مفهوم خیلی موفق نیست و باعث ایجاد محدودیت‌های متعددی در توسعه دانش کسر می‌شود. بنابراین به جای آن می‌توان از فعالیت‌های ساده‌ای مبتنی بر زیرساختار *خارج‌قسمت* به عنوان جایگزینی برای فعالیت‌های *تقسیم‌بندی مساوی* استفاده کرد. آن‌ها در مطالعه خود به این نتیجه رسیدند که این زیرساختار پایه‌های محکمی برای مفهوم تقسیم بندی مساوی و مفهوم *تک‌جزء* فراهم می‌کند و کمک به درک دیگر زیرساختارها می‌کند.

بنابراین برای فهم همه جانبه‌ی کسر باید به تمامی زیرساختارها توجه داشت و از مزایای آن‌ها بهره برد (کیپرن ،۱۹۹۳ ، بر و همکاران ۱۹۹۲ ،کاارالامبوز[2] و پنتازی ۲۰۰۷). یکپارچگی و تلفیق این زیرساختارها با هم، به درک همه جانبه و مفهومی اعداد گویا منجر می‌شود. ضمنا باید توجه داشت که از ظرفیت کامل این زیرساختارها استفاده

[1] Purnomo
[2] Charalambous & Pantazi

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

شود. «ساده‌سازی» این زیر ساختارها و استفاده وسیع‌تر از این «نسخه‌های ضعیف شده» در فعالیت‌ها و موقعیت‌های یادگیری، باعث ایجاد محدودیت در توسعه فهم این زیرساختارها و درک ناقص مفهوم کسر می‌شود.

نظر به اهمیت مفهوم کسر در دوره ابتدایی و گستردگی مفاهیم مرتبط با آن، لازم است در برنامه و کتاب‌های درسی نیز، به توسعه مفهومی این مفهوم، به طور دقیق و ظریفی پرداخته شود. لذا توجه به تمامی زیرساختارهای کسر جهت درک عمیق و یکپارچه این مفهوم و استفاده از مزایای آن‌ها در برنامه و کتاب‌های درسی یک امر مهم و ضروری است که باید مورد توجه و تاکید ویژه قرار گیرد.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

منابع

امیری حمیدرضاو همکاران. (۱۳۹۵). *کتاب معلم: راهنمای تدریس، ششم دبستان*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی .وزارت آموزش و پرورش.

ایزدی، مهدی، و ریحانی، ابراهیم. (۱۴۰۰). بررسی درک دانش آموزان دوره ی دوم ابتدایی شهر تهران از زیر ساختار جزء به کل مفهوم کسر بر اساس نظریه ی APOS و SOLO با استفاده از یک تکلیف غیرمعمول. پژوهش در برنامه ریزی درسی (دانش و پژوهش در علوم تربیتی-برنامه ریزی درسی)، ۱۸(۴۱ (پیاپی ۶۸))، ۱۲۴-۱۴۱.

ریحانی، ابراهیم، بخشعلی زاده، شهرناز، دوستی، ملیحه. (۱۳۹۳). درک مفهوم کسر توسط دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی. *فصلنامه مطالعات برنامه درسی*، دوره9 :، شماره: 34 .

غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۹۹). ارزشیابی دوره‌ای برنامه درسی ریاضی دوره اول ابتدایی. طرح پژوهشی به سفارش پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش. سازمان پژوهش و برنامه ریزی.

نقیبی، مهدخت؛ چمن آرا سپیده؛ خسروشاهی لیلا. (۱۴۰۱). *آنچه برای تدریس کسر باید بدانیم: کتاب دانش‌افزایی حرفه‌ای معلم*، سازمان پژوهش و برنامه ریزی درسی، انتشاران مدرسه.

نقیبی، مهدخت. (۱۳۹۹). بررسی و تحلیل چارچوب های نظری تعابیر اعداد گویا، *پژوهش در آموزش ریاضی*، دوره ۱، شماره ۲، ۲۶-۱۳.

جعفری هرندی، رضا، نصر، احمدرضا، و میرشاه جعفری، سیدابراهیم. (۱۳۸۷). تحلیل محتوا روشی پر کاربرد در مطالعات علوم اجتماعی, رفتاری و انسانی, با تاکید بر تحلیل محتوای کتاب های درسی. روش شناسی علوم انسانی (حوزه و دانشگاه)، ۱۴(۵۵).

Adu-gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicrope, R., & Bosse, M. J. (2019). Making sense of fraction division: Domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. Mathematics Education Research Journal, 31, 507–528.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.296-333). New York: Macmillan PublishingCompany.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R. et Silver, E.A. (1983). Rational-number concept. Dans R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (p. 91-126). New York Academic Press.

Cai, J., Ni, Y. (2011). "Investigating Curricular Effect on the Teaching and Learning of Mathematics in a Cultural Context: Theoretical and Methodological Considerations." *International Journal of Educational Research* 50 (2): 65–70.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical modelto study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64* (3), 293–316.

Charalambous, C. Y., & Pitta- Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. In H. L.Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference 2*, 233-240.

Getenet, S., & Callingham, R. (2021). Teaching interrelated concepts of fraction for understanding and teacher's pedagogical content knowledge. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 201–221.

Harvey, R. (2012). Stretching student teachers' understanding of fractions. Mathematics Education Research Journal, 24, 493–511.

Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal*, 25, 547–567.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. *Rational numbers: An integration of research*, *49*, 84.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: implications for curriculum and instruction. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323–370). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. Dans R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (p. 101 – 144). Columbus, OH : ERIC/SMEAC.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

Kieren, T. (1980). The rational number construct - Its elements and mechanisms. Dans Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (p. 125-150). Columbus : ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (p. 53 – 92). Reston: NCTM.

Kieren, T.E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In G.Leinhardt, R. Putnam and R.A. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, 323–371.

Lamon, S. J. (2020). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (4th ed.). New York, NY: Routledge.

Lamon, S, J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lee, M. Y., Choy, B. H., & Mizzi, A. (2021). Exploring the introduction of fractions in Germany, Singapore, and South Korea mathematics textbooks. Journal of the Korean Society of Mathematics Education, 24(2), 111–130.

Mamede, E., Nunes, T. and Bryant, P. (2005) The equivalence and ordering of fractions in partwhole and quotient situations IN: Chick, H.L. and Vincent, J.L. (eds.) *Proceedings of the 29th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Melbourne, Australia. 281-288.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, (pp. 261-288). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Murdock-Stewart, V. (2005). Making sense of students' understanding of fractions: An exploratory study of sixth graders' construction of fraction concepts through the use of physical referents and real word representations. Florida: Florida state University.

Nicol, C., and S. Crespo (2006). "Learning to Teach with Mathematics Textbooks: How Preservice Teachers Interpret and Use Curriculum Materials." *Educational Studies in Mathematics* 62 (3): 331–355.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

Post, T.R., Behr, M.J. and Lesh, R. (1982). Interpretations of rational number concepts IN: silvey, L. and Smart, J. (eds.) 1982 Yearbook: *Mathematics for the middle Grades (5–9)*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 59-72.

Purnomo, Y. W., Arlini, R., Nuriadin, I., & Aziz, T. A. (2021). Learning trajectory based on fractional subconstructs: Using fractions as quotients to introduce fractions. Mathematics Teaching-Research Journal, 13(3), 183–207

Reys, B. J., R. E. Reys, Chavez, O. (2004). "Why Mathematics Textbooks Matter?" *Educational Leadership*61 (5): 61–66.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L., Rogers, A., Falle, J., Bennett, S. (2012). *Helping children learn mathematics* (1st Australian ed.). Milton, NSW: John Wiley & Sons Australia

Shield, M., and S. Dole. (2013). "Assessing the Potential of Mathematics Textbooks to Promote Deep Learning." *Educational Studies in Mathematics* 82 (2): 183–199.

Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the learning through activity research program. Journal of Mathematical Behavior, 52, 122–133.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*, 127-155

Sowder, J., Philipp, R. A., Armstrong, B. E., & Schappelle, B. P. (1998*). Middle- Grade teachers' mathematical knowledge and its relationship to instruction: A research monograph.* Albany, NY: State University of New York Press.

Stein, M., J. Remillard, Smith, M. (2007). "How Curriculum Influences Student Learning." In book *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by F. Lester, 319–369. Greenwich, CT: Information Age.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2018). Learning progression towards a measurement concept of fractions. *International Journal of STEM Education*, 5 (27).

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]

Zhang, X., Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (2014). Conceptual mis(understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. Mathematics Education Research Journal, 27(2), 233–261.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-10]