Journal of Theory & Practice in Curriculum
Vol.19 (10); 2022, 49-90

دو فصلنامهٔ نظریه و عمل در برنامهٔ درسی
سال دهم، شمارهٔ ۱۹، بهار و تابستان ۱۴۰۱، ۹۰-۴۹

دانش‌های مورد نیاز آموزشگران ریاضی جهت آماده‌سازی معلمان ابتدایی آینده برای تدریس ریاضی[۱]

The Required Knowledge for Mathematics Educators in Preparing Prospective Mathematics Teachers

کبری بهالو هوره [۲]، محبوبه عارفی[۳]، زهرا گویا[٤]، کوروش فتحی واجارگاه[٥]

چکیده : به‌منظور شناسایی دانش‌های مورد نیاز آموزشگران ریاضی که مسئولیت تدریس ریاضی به معلمان آینده[٦] را به‌عهده دارند، پژوهشی با رویکرد کیفی طراحی شد که تمرکز آن، بر مبحث ضرب و تقسیم کسرها بود. شرکت‌کنندگان در این مطالعه، دو آموزشگر ریاضی دانشگاه فرهنگیان بودند که درس «اصول آموزش ریاضی» را تدریس می‌کردند. داده‌های این تحقیق که در زمان همه‌گیری کووید-۱۹ انجام شد، از چهار منبع کلاس درس[۷]، مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته، درس‌نامه‌های مدرسان و یادداشت‌های میدانی نویسنده اول جمع‌آوری شد. پس از چندین‌بار کاهش نظام‌وار داده‌های تجمیع‌شده، سه مقوله «نقش باورهای آموزشگران در تدریسِ ریاضی»، «انتخاب محتوای چالش‌برانگیز برای توسعه مفهومی ضرب و تقسیم» و «شناخت بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزانَ ظاهر شدند. سپس بر اساس آنها، چارچوبی با چهار مؤلفه «دانش محتوایی-موضوعی ریاضی»، «دانش برنامه درسی ریاضی»، «دانش بدفهمی‌های ریاضی» و «دانش متناسب‌سازی تدریس ریاضی با موقعیت» برای دانش‌های مورد نیاز آموزشگران ریاضی، تدوین شد.

واژگان کلیدی: : روش تحقیق کیفی، آموزشگران ریاضی، دانشجویان رشته - آموزش ابتدایی، ضرب و تقسیم کسرها

K.Bahaloo Horeh, M. Arefi , Z. Gooya , K. Fathi Vajargah

Abstract: A research was conducted using qualitative approach, to identify the required knowledge for mathematics educators that are preparing prospective elementary teachers to teach mathematics. Two mathematics educators from "Farhangian University" volunteerly participated in this study. The data collected from four different sources namely; observation of virtual classes of two participants while teaching multiplication and division of fractions, semi-structred interviews with participants, educators' lesson plans and first author's field notes. The classes hold virtually due to the Covid-19 pandamic intervies conducted virtually as well. After many levels of systematic data reduction, three categories emerged as "the role of educators' beliefs in teaching mathematicsL, "choosing challenging content for developing conceptual understanding of multiplication and division of ractions and "recognition of misconceptions of elementary students". As a result, a theoretical framework developed for required knowledge of mathematics educators with four components as "knowledge of mathematics-content", "knowledge of mathematics curriculum", "knowledge of students' mathematics misconceptions" and "knowledge of modifying teaching to fit the situation."

.**Keywords**: Qualitative Research Paragdim, Mathematics Educators, Prospective Elementary Teachers, Multiplication and Division of Fractions.

---

۱ . این پژوهش از رساله دکتری استخراج شده است. تاریخ دریافت مقاله: ۱٤۰۰/۰۷/۱۵، تاریخ پذیرش: ۱٤۰۱/۰۱/۱۰

۲ .دانشجوی دکتری برنامه درسی، دانشکده علوم تربیتی و روان‌شناسی، دانشگاه شهید بهشتی، ایران ، رایانامه: Zadshirmahbobe@gmail.com

۳ . دانشیار گروه علوم تربیتی، دانشکده علوم تربیتی و روان‌شناسی، دانشگاه شهید بهشتی، ایران ، رایانامه : m-arefi@sbu.ac.ir

٤ . استاد گروه ریاضیات کاربردی و صنعتی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، ایران ، (نویسنده مسئول)رایانامه: z_*gooya@sbu.ac.ir*

٥ . استاد گروه علوم تربیتی، دانشکده علوم تربیتی و روان‌شناسی، دانشگاه شهید بهشتی، ایران ، رایانامه : kouroshfathi2@gmail.com

٦ در این پژوهش، از سه واژه دانشجو-معلمان، معلمان آینده و دانشجویان، به یک معنا استفاده شده است.

۷ داده‌های این مطالعه در زمان همه‌گیری کووید-۱۹ جمع‌آوری شد و حضور نویسنده اول در کلاس‌های مجازی بود و مصاحبه‌ها نیز به‌صورت مجازی انجام شد.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

مقدمه

در شروع هزاره جدید، بعضی یافته‌های پژوهشی در حوزه آموزش دانشجو-معلمان ریاضی دوره ابتدایی، باعث تحول در این رابطه شد. برای نمونه، بال[1] و بَس[2] (۲۰۰۰) و «ما»[3] (۱۹۹۹) به این نتیجه رسیدند که دانشجو- معلمانِ دوره ابتدایی نیازمند داشتن درک عمیق و به‌هم‌پیوسته‌ای از ایده‌های مهم ریاضی هستند. در تداوم این بحث، «شورای کنفرانس علوم ریاضی در ایالات متحده[4]» (۲۰۱۲) خواستار درگیرکردن معلمان ابتدایی در انجام ریاضی و حمایت از آنها برای ارتقای درک عمیق ایده‌های اساسی ریاضی شد که در دوره ابتدایی آموزش داده می‌شود. محققان دریافتند که دانش ریاضی معلمان به‌طور قابل‌توجهی بر چگونگی و چیستی تدریس آنها و یادگیری دانش‌آموزان، تأثیر دارد (بال و بَس، ۲۰۰۰؛ هیل[5] و همکاران، ۲۰۰۵). توجه پژوهشگران آموزش ریاضی به دانش موضوعیِ ویژهٔ توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی، توسط لیپینگ ما[6] (۱۹۹۹) مطرح شد و بسیاری از پژوهشگران حوزهٔ آموزش معلمان ریاضی، نسبت به آن حساس شدند. به عقیده «ما»، معلمان نیازمند دانش قوی ریاضی هستند تا به آنها، امکان برخورد انعطاف‌پذیر را با پیچیدگی تدریس ریاضی به دانش‌آموزان گوناگون، بدهد. وی به این جمع‌بندی رسید که معلمان آینده برای تدریس اثربخش در دوره ابتدایی، نیازمند «درک عمیق مفاهیم اساسی ریاضی[7]» هستند که ریاضی این دوره، بر آن بنا شده است و ایشان را قادر می‌سازد تا بتوانند به همه دانش‌آموزان با توانایی‌های مختلف، تدریس کنند. سیمون[8] (۲۰۰۰) نیز یادگیری ریاضیِ دانشجو-معلمان دوره ابتدایی را یکی از

1 Ball
2 Bass
3 Liping Ma
4 *The* **Conference** Board of the **Mathematical Sciences**: CBMS
5 Hill
۶ علت آوردن نام کامل «لیپینگ ما» این است که با «ما» به عنوان ضمیر اول شخص جمع، اشتباه نشود. بعد از این هم هرجا نام وی استفاده می‌شود، داخل گیومه گذاشته می‌شود.
7 Profound Understanding of Fundamental Mathematics: PUFM
8 Simon

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

نیازهای جدی جنبش اصلاحات در آموزش ریاضی دانست و خواستار اتخاذ رویکردهای نوآورانه توسط آموزشگران معلمان برای آموزش معلمان آینده دوره ابتدایی شد که مبتنی بر یافته‌های پژوهشیِ آخر قرن بیستم بود (آسکی[1]، ۱۹۹۹؛ هو[2]، ۱۹۹۹ و ما، ۱۹۹۹.)

در شروع قرن ۲۱، انجام پژوهش‌ها برای شناسایی جنبه‌های مختلف دانش ریاضیِ مورد نیاز برای دانشجو-معلمان دوره ابتدایی ادامه یافت که برای نمونه، می‌توان به هیل، رووان[3] و بال (۲۰۰۵) و هیل، شیلینگ[4] و بال (۲۰۰٤) اشاره نمود. این در حالی است که جهت پژوهش‌های اخیر، به سمت تعمق بیشتر بر دانشِ ریاضیِ مورد نیاز آموزشگران معلمان آینده میل کرده است (چاپمَن، ۲۰۲۱) که به دلیل مسئولیتی که دارند و آن، آموزش چگونگی تدریس ریاضی به همهٔ کودکان است، ماهیتی پیچیده دارد. زیرا به بزرگسالانی تدریس می‌کنند که دانستن مباحث ریاضی مطرح شده در تدریس، مفروض گرفته می‌شود، در حالی که ممکن است بسیاری از آنان، در فهم و درک آن مباحث، مشکل داشته یا دچار بدفهمی‌های انباشته‌شده از دورهٔ آموزش عمومی خود باشند. به دلیل این پیچیدگی، در دههٔ اخیر میلادی، تمرکز بر شناسایی دانش موردنیاز آموزشگران معلمان ریاضی، بیشتر شده‌است. بدین سبب پژوهش حاضر، با هدف شناسایی پیچیدگیِ مستتر در دانش مورد نیازِ آموزشگران معلمان که به آماده‌سازیِ معلمان آیندهٔ دورهٔ ابتدایی می‌پردازند، طراحی شد. همچنین برای تحقق این هدف، سؤال اصلی این پژوهش چنین صورت‌بندی شد تا جنبه‌هایی از این پیچیدگی را تبیین کند. برای این کار، تصمیم‌گرفته‌شد که با توجه به گستردگی مباحث ریاضیِ دورهٔ ابتدایی، بر یک مبحث مشخصِ چالش‌برانگیز تمرکز شود. برای این کار و با مراجعه به ادبیات پژوهش، معلوم شد که چندین پژوهش نشان داده‌است که مبحث ضرب و

[1] Askey
[2] Howe
[3] Rowan
[4] Schilling

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

تقسیم کسرها، برای دانش‌آموزان چالش‌برانگیز است که از آن جمله، پژوهش‌های بال (۱۹۹۰)، فیشباین[1] (۱۹۸۵)، گریبر[2] و تیروش[3] (۱۹۸۸) و «ما» (۱۹۹۹) مرور شد که هرکدام، به یافته‌های قابل تأملی رسیده بودند. از طرف دیگر، شرکت‌کنندگان در این پژوهش نظرشان این بود که هم تدریس ضرب و تقسیم کسرها برای معلمان ابتدایی چالش‌برانگیز است و هم یادگیری آن برای دانش‌آموزان سخت است. در نتیجه، این مبحث به‌عنوان نقطهٔ تمرکز موضوعی این پژوهش انتخاب شد.

پیشینه پژوهش

در دهه‌های ٦٠ و ٧٠ میلادی و با مقبولیت فراوانی که روان‌شناسی رفتاری پیدا کرده بود، پژوهش‌های مبتنی بر «فرایند-محصول[4]» مورد توجه واقع شد و این روند تا دهه ٨٠ میلادی، رویکرد قالب در تحقیقات مربوط به آموزش معلمان بود. هیل، رووان[5] و بال (۲۰۰۵) در مروری که بر پژوهش‌های آن دو دهه داشتند، به این جمع‌بندی رسیدند که هدف عمده آن رویکرد، توصیف رابطهٔ بین رفتار تدریسیِ معلم و پیشرفت دانش-آموز بود. با این حال، به گفتهٔ دونمویر[6] (۱۹۹٦)، با وجود تعداد زیاد پژوهش‌هایی که با رویکرد فرایند-محصول در حوزهٔ آموزش معلمان انجام شد، ولی توصیه‌های آنها نتوانست در بهبود آموزش معلمان، نقشی برجسته ایفا نماید و در نتیجه این رویکرد به آموزش معلمان، مقبولیت پیدا نکرد.

نوع دیگر مطالعاتِ مبتنی بر رفتار، مربوط به ویژگی‌های «دانش»معلمان بود. ادوارد بِگل[7] (۱۹۷۹) که از افراد کلیدی در پروژهٔ معروف «گروه مطالعاتی ریاضیِ مدرسه‌ای[8]» و استاد ریاضی دانشگاه استانفورد بود، پژوهش گسترده‌ای انجام داد. هدف آن پژوهش،

[1] Fischbein
[2] Graeber
[3] Tirosh
[4] process-product
[5] Rowan
[6] Donmoyer
[7] Edward G. Begle
[8] School Mathematics Study Group: SMSG

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

آزمودن این فرضیه بود که معلمان ریاضی که درس‌های پیشرفته‌تر ریاضی در سطح دانشگاه را می‌گذرانند، تدریس ریاضی موفق‌تری دارند. وی برای محک زدن فرضیهٔ خود، یک مطالعه با رویکرد کمّی و به لحاظ روشی، در نهایت دقت و کنترل انجام داد. پس از تحلیل داده‌ها، نتیجهٔ این پژوهش، رد این فرضیه بود و همین یافته، باعث توجه جدی‌تر به دانش‌های مورد نیاز برای معلمان ریاضی شد و انگیزه‌ای قوی در شولمن (۱۹۸٦) ایجاد نمود تا صورت‌بندی جنجالی خود را در مورد انواع دانش‌های ضروری برای معلمان، ارائه دهد.

نتایج این پژوهش‌ها، زمینهٔ واقعی را برای تغییر دیدگاهِ «فرایند-محصول» که مبتنی بر نگاه عمودی و از بالا به پایین و بیرونی نسبت به آموزشِ معلمان ریاضی بود و تأکید زیادی بر افزایش دانش موضوعی داشت، فراهم نمود. افزون بر این، تبیین دیدگاه علوم‌شناختی، ایده‌های جدیدی در مورد دانش معلمان مورد توجه واقع شد و هم‌زمان با تغییر نگاه از دیدگاه تحصّلی به دیدگاه شناختی، سلطهٔ روان‌شناسی رفتاری نیز بر آموزش معلمان، به چالش کشیده شد و استقبال از روان‌شناسی‌های کل‌نگر[1] به خصوص روان‌شناسی‌های مبتنی بر اهمیت ذهن و شناخت بر یادگیری، زیاد شد. این دو تغییر، تأثیر به‌سزایی بر بازنگری روش‌شناسی پژوهشی در حوزهٔ آموزش معلمان داشت که شکل رایج آن، تبعیت از الگوهای «تحقیق-توسعه-انتشار[2]» توسط پژوهشگران بیرونی و تزریق نتایج به کلاس‌های درس و تجویزهای از بالا به پایین به معلمان بود که به‌طور عمده، در پارادایم کمّی قرار داشتند و توسط تیم‌های پژوهشیِ بزرگ و خارج از بدنهٔ کلاس درس انجام می‌شدند. با وجود این، تغییر در دیدگاه‌های فلسفی و روان‌شناسی، آنقدر قوی بود که از ابتدای دههٔ هشتاد میلادی، باعث ایجاد چرخشی عظیم در تحقیقات حوزهٔ آموزش‌های معلمان شد و طرح «پژوهش مبتنی بر کلاس درس[3]»،

[1] Holistic
[2] Research-Development-Diffusion: RD & D
[3] Class-based Research

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

«معلم به عنوان محقق[1]» و تبدیل «قرارگاه تحقیق[2]» از بیرون به درون کلاس درس، سبب‌ساز وقوع اتفاق‌های بنیادی در این حوزه شد. مقالهٔ کانلی و بن‌پرتز[3] (۱۹۸۱)، جزو اولین منابع نظری برای معلم به‌عنوان محقق کلاس درس خویش بود. پس از آن، کار و کمیس[4] (۱۹۸۶) با انتشار کتاب کلاسیک «انتقادی شویم: آموزش، دانش و تحقیق عمل[5]»، توجه جامعهٔ پژوهشی آموزش معلمان را به روش‌های نشأت‌گرفته از علوم اجتماعی و با تأکید بر «تحقیق عمل» یا «اقدام‌پژوهی» جلب کردند. در این کتاب، بحث‌های نظری جسورانه‌ای در این حوزه مطرح شد که مهم‌ترین آنها، به رسمیت شناختن پژوهش‌های انجام شده توسط معلمان کلاس درس، معتبر دانستن مشاهدات و یادداشت‌های معلمان به‌عنوان داده‌های معتبر و نحوهٔ اعتباربخشی به یافته‌های مبتنی بر آن داده‌ها بود. این رویکرد نزدیک به ۱۸۰ درجه با رویکرد علمی/کمّی تفاوت داشت و به جای «دقت»، اصالت را به «اعتبار تفسیر» می‌داد. بنابراین نگاه، هدف آماده‌سازی معلمان برای تدریس، تنها در این نبود که تعداد درس‌های موضوعی و روشی که در دانشگاه می‌گرفتند، افزایش یابد. در عوض، اساس بر دانش عمیق‌تری بود که از موضوع و روش بهره می‌برد، اما تأکیدش بر روشی بود که مناسب محتوای مورد تدریس باشد؛ دانشی که بعد، شولمن از آن به نام «دانش پداگوژیکی محتوا[6]» نام برد.

در پی این اتفاق‌های فلسفی و روان‌شناسی و روشی، شولمن در نشست سالانه «اتحادیهٔ تحقیقات آموزشی آمریکا[7]» در سال ۱۹۸۵، در مورد انواع دانش‌های لازم برای آموزش معلمان، سخنرانی کرد و در آن، به ضرورت انجام پژوهش درباره «تدریس» اشاره نمود و از آن با تعبیر «پارادایم گمشده[8]» یاد کرد و بعد در مقاله‌ای (شولمن،

[1] Teacher as Researcher
[2] Research Setting
[3] Connelly & Ben pretz
[4] **Carr, & Kemmis**
[5] **Becoming Critical: Education, Knowledge, and Action Research**
[6] Pedagogical Content Knowledge: PCK
[7] American Educational Research Association: AERA
[8] Missing Paradigm

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

۱۹۸٦)، ضمن نقد روش‌های استفاده شده در آموزش‌های معلمان، به تشریح و توصیف آن پرداخت. انتقاد اصلی شولمن به استفاده از رویکرد «فرایند–محصول» به آموزش معلمان این بود که در آن، بیشتر به مباحث عمومی تدریس مانند فنون و مدیریت کلاس درس توجه می‌شود و بر دانش موضوعی و پداگوژی ویژه متناسب با تدریس آن موضوع، پرداخته نمی‌شود. وی سپس بر اهمیت سه نوع دانش شامل «دانش محتوایی[1]»، «دانش پداگوژیکی محتوا» و «دانش برنامه درسی» برای تدریس موضوع‌های مختلف تأکید کرد و لحاظ نمودن آنها را در آموزش معلمان، لازم دانست.

شولمن در تبیین نظری خود به این جمع‌بندی رسید که «دانش محتوایی»، در واقع موضوعی است که معلم به تدریس و آموزش آن می‌پردازد و دانستن آن، مفروض است. در حالی که «دانش پداگوژیکی محتوا»، دانش موضوعی و پداگوژی مربوط به آن است؛ نه این است و نه آن و در عین حال، هم این است و هم آن؛ دانشی که به معلم کمک می‌کند تا بتواند یک ادعا را ارزیابی کند که چرا چیزی درست است، چگونه می‌توان درستی آن را ثابت کرد یا آن که برای ناقص بودن آن دلایل محکم ارائه داد یا حتی با مستنداتی دقیق، آن را رد کرد. بدین سبب ایجاد و توسعهٔ چنین دانشی در معلمان، نیازمند «دانش برنامه درسی» است تا به آنان کمک کند که سیر تحول موضوع و ساختار و چگونگی ارتباط بین مفاهیم و ابداع رویه‌ها و صورت‌بندی‌های درون موضوع را بشناسند و درک نمایند.

آنچه که در رویکرد «فرایند–محصول» به آموزش معلمان، شولمن از آن به منزلهٔ «پارادایم گمشده» نام برد، در صورت‌بندیِ دانش‌های مورد نیاز برای آموزش معلمان، آن را یافت و تبیین نمود. این پارادایم، همان قطعهٔ گمشده‌ای بود که بِکِل در تحقیق وسیع خود، به دنبال یافتن آن بود و به این یافته رسیده بود که برای آموزش معلمان ریاضی، الزام دانشجو–معلمان و معلمان شاغل به گرفتن درس‌های بیشتر موضوعی و روشی، اثربخشی اندکی دارد و چیز دیگری باید دخیل باشد. این نقطه‌ای بود که پژوهش‌های

[1] Content Knowledge

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

بِگِل در مورد آموزش معلمان ریاضی و تبیین نظری شولمن دربارهٔ دانش‌های مورد نیاز معلمان، با هم تلاقی کردند و از این اتفاق مهم، توجه پژوهشگران حوزه آموزش معلمان، به «دانش پداگوژیکی محتوا» و نقش «آموزشگران معلمان ریاضی» جلب شد و آغازگر تحقیقات گسترده‌ای شد.

- **آموزشگران معلمان ریاضی**

در دهۀ ۱۹۹۰ میلادی، تحقیقات آموزش معلمان به سمت آموزش‌های موضوعی و آموزشگران آنها متمایل شد و در این میان، آموزش‌های قبل و ضمن‌خدمت معلمان ریاضی دوره متوسطه و معلمان دوره ابتدایی که ریاضی هم تدریس می‌کنند، کانون توجه واقع شد (آبل[1] و همکاران، ۲۰۰۹؛ چاپمن[2]، ۲۰۰۸؛ تی‌زور[3]، ۲۰۰۱؛ فن‌زوست[4]، مور[5] و استوکرو[6]،۲۰۰۶؛ زاسلاوسکی[7] و لیکین[8]، ۲۰۰۰). از مهم‌ترین دستاوردهای این پژوهش‌ها، تبیین چارچوب‌ها و صورت‌بندی‌های نظری برای آموزش معلمان ریاضی و تدوین نقش آموزشگران ریاضی در این آموزش‌ها بود (بال، ۲۰۰۸؛ یاورسکی[9]، ۲۰۰۸؛ پِرکس و پرستِیج[10]، ۲۰۰۸). همچنین با عنایت به یافته‌های بِگل و تنوع دانش‌هایی که شولمن مطرح کرده بود، برای ایجاد و توسعهٔ دانش پداگوژیکی محتوای ریاضی در دانشجو-معلمان و معلمان شاغل، ضروری بود که آموزش توسط آموزشگران ریاضی ارائه شود که هم درک عمیقی از ریاضی و هم آموزش ریاضی داشته باشند. این گروه «آموزشگران معلمان ریاضی[11]» نامیده شدند و پژوهش در مورد حوزهٔ متعلق به آنان،

[1] Abell
[2] Chapman
[3] Tzur
[4] Van Zoest
[5] Moore
[6] Stockero
[7] Zaslavsky
[8] Leikin
[9] Jaworski
[10] Perks and Prestage
[11] Mathematics Teacher Educator

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

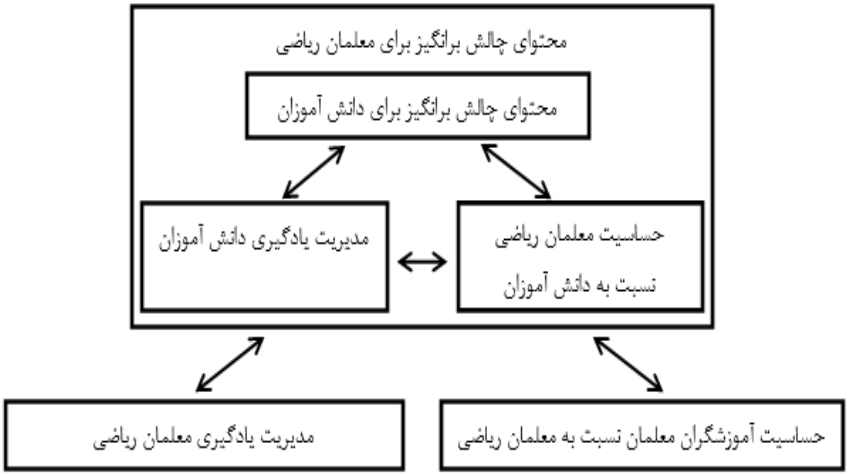
ابتدا با شیبی کم و در شروع هزارهٔ جدید، با شیبی تند توسعه یافت (ریدر[1]، لینچ و دیویس[2]، ۲۰۰۶).

از جمله یافته‌های پژوهشی مربوط به آموزشگران معلمان ریاضی این بود که آنان، تدریس مباحث پایه‌ای ریاضی را به دانشجو-معلمانی ارائه می‌دهند که بزرگ‌سال هستند (اسمیت[3]، ۲۰۰۳، ویلسون[4] و بال، ۱۹۹۶) و فرض بر این است که یا آن مباحث را می‌دانند یا فکر می‌کنند که می‌دانند، ولی تأکید بر آموزش چگونگیِ تدریس آنهاست (زاف[5]، ۲۰۱۰.)

به دلیل اهمیت جایگاه آموزشگران معلمان ریاضی در آموزش دانشجو-معلمان، چارچوب‌هایی برای شناسایی دانش‌های مورد نیاز آنان تبیین کردند. برای نمونه، زاسلاواسکی و لیکین[6] (۲۰۰۴) از یک «سه‌گانه» آموزش معلمان ریاضی که قبلاً توسط زاسلاواسکی (۱۹۹۲) تدوین شده بود، به عنوان یک مؤلفه استفاده کردند و به آن، دو مؤلفه دیگر را افزودند. این سه‌گانه، با تکیه بر «محتوای چالش‌برانگیز برای معلمان ریاضی[7]»، دارای سه مؤلفه « محتوای چالش‌برانگیز برای دانش‌آموزان»، «مدیریت یادگیری دانش‌آموزان[8]» و «حساسیت معلمان ریاضی نسبت به دانش‌آموزان[9]» بود. زاسلاوسکی با همراهی لیکین (۲۰۰۴) با نتایج پژوهشی تازه‌ای که به‌دست آوردند، دو مؤلفهٔ «مدیریت یادگیری معلمان ریاضی» و «حساسیت آموزشگران معلمان نسبت به معلمان ریاضی» را به این چارچوب اضافه کردند (شکل ۱.)

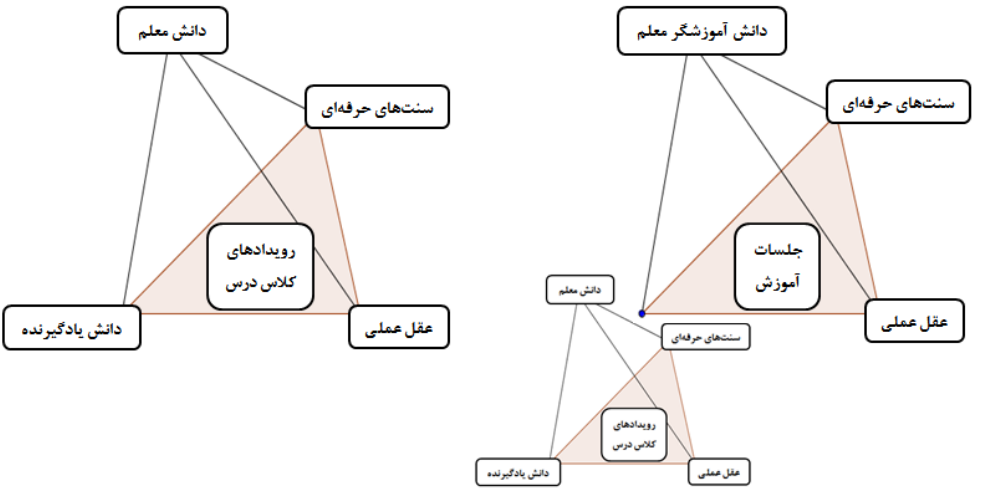
[1] Rider
[2] Lynch-Davis
[3] Smith
[4] Wilson
5 Zopf
[6] Zaslavsky & Leikin
[7] Challenging Content for Mathematics Teachers
[8] Management of Mathematics Teachers‘ Learning
[9] Sensitivity to Mathematics Teachers

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]



شکل ۱: سه گانه آموزشِ آموزشگر معلمان[1] زاسلاواسکی و لیکین (۲۰۰۴)

پرکس و پرستیج (۲۰۰۸) مدلی مشابه و با تفصیلی بیشتر را در قالب « چهاروجهی معلم-آموزشگر معلم-دانش[2]» ارائه دادند (شکل ۲.)



شکل ۲: مدل دانش آموزشگر معلمانِ پرکس و پریستیج (۲۰۰۸)

[1] Teacher Educator Teaching Triad
[2] Teacher-Educator-Knowledge-Tetrahedron

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

چارچوب‌های تبیین‌شده مبتنی بر یافته‌های پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهد که دانش مورد نیاز آموزشگران ریاضی، با دانش لازم برای معلمان ریاضی، تفاوت‌های ظریفی دارد (زاف، ۲۰۱۰ و اسمیت، ۲۰۰۳). از نظر اسمیت (۲۰۰۳)، تفاوت اصلی در مخاطبان است که در اولی بزرگ‌سالان و در دومی، کودکان و نوجوانان هستند. در حالی که زاف (۲۰۱۰)، علاوه بر این، به دو تفاوت «محتوای ریاضی» و «اهداف آموزشی» هم اشاره کرده است و بر این باور است که این سه وجه، بر طراحیِ برنامه‌های درسی و آمادگی حرفه‌ای برای دانشجو-معلمان و آموزشگران معلمان، تأثیر می‌گذارد. برای نمونه، وی توضیح می‌دهد که معلمان در کلاس درس، ریاضی را به دانش‌آموزانی تدریس می‌کنند که با تجربه‌های مختلف و دانش قبلیِ متفاوت به کلاس می‌آیند و با کمک آنها، دانش ریاضی خود را می‌سازند. در صورتی که آموزشگران معلمان، به دانشجو-معلمان چگونگیِ تدریس ریاضی را به دانش‌آموزان آموزش می‌دهند که شامل دانش ریاضی و دانشِ تدریس ریاضی است.

این حوزه نیازمند پژوهش‌های بسیار است و به گفتهٔ چَپمن (۲۰۰۸)، هنوز پیشینهٔ پژوهشیِ کافی در مورد آموزش و آماده‌سازیِ آموزشگران معلمان ریاضی به‌ویژه در دورهٔ ابتدایی، وجود ندارد. در این راستا، چَپمن (۲۰۲۱) با تمرکز پژوهشی خود در این حوزه، سه نوع دانش را برای آموزشگران ریاضی شناسایی کرد که شامل «دانش معلمان ریاضی»، «دانشِ آموزش معلمان ریاضی» و «دانش باورهای معلمان ریاضی» است. منظور از «دانش معلمان ریاضی» آن است که آموزشگر بداند که معلمان به چه دانش محتوایی نیاز دارند تا بتوانند آن را به دانش‌آموزان، آموزش دهند. «دانش آموزش معلمان ریاضی»، به دانشی اشاره دارد که دانستن آن برای آموزشگران ضروری است تا بتوانند برای جلب مشارکت دانشجو-معلمان در یادگیری خویش، از آن استفاده کنند. این دانش درواقع، محتوای اصلی درس‌هایی است که هدف آنها، آموزش معلمان آینده[1] است و محتوای اصلی آن، چگونگی آموزش محتوای ریاضی به دانشجو-معلمان است

[1] Prospective Teachers/Student Teachers

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

و به روش‌ها و مهارت‌های تدریس ریاضی و هویت و توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی مربوط است. وی همچنین دریافت که باورهای آموزشگران نسبت به دانشجو-معلمان ریاضی، نقش تعیین‌کننده‌ای در ایجاد و توسعهٔ «دانش معلمان ریاضی» و «دانشِ آموزش معلمان ریاضی» دارد. باورها نوع منحصربه‌فردی از دانش هستند که چگونگیِ ارتباط بین «دانش معلمان ریاضی» و «دانش آموزش معلمان ریاضی» توسط آموزشگران را معنا می‌بخشند.

روش‌شناسی تحقیق

با توجه به هدف پژوهش و ماهیت آن، از «نظریه برآمده از داده‌ها[1]» در پارادایم کیفی[2] استفاده شد تا از دل داده‌های واقعی و توصیف آنها، بنیان نظری پژوهش به تدریج شکل بگیرد. تأکید این نظریه، بر جمع‌آوری و تحلیل هم‌زمان داده‌ها، رجوع مکرر به آنها و کاهش نظام‌وارشان[3] تا رسیدن به شواهدی متقن و قابل توصیف و در نهایت، شکل‌گیری یک چارچوب نظری یا یک نظریه است. نکتهٔ اصلی این روش این است که ابتدا داده‌ها جمع‌آوری می‌شوند و بعد، نظریه ساخته می‌شود، همچنان که اجزای اصلی نظریه که «مفاهیم» هستند، همگی «موقت[4]» و مستعد جرح‌وتعدیل‌اند (کوربین و اشتراوس، ۱۹۹۰). در این روش، داده‌ها به‌طور مکرر با هم مقایسه می‌شوند و هر تحلیل جدیدی با ارجاع به داده‌ها و تعامل با مشارکت‌کنندگان در پژوهش، بازبینی می‌شود تا ابهام‌های احتمالی، برطرف شوند.

برای اطمینان از اعتبار داده‌ها و تأیید یافته‌ها، از روش مثلثی‌سازی[5] استفاده شد و همگرایی داده‌های جمع‌آوری شده از چهار منبع، «قابلیت اعتماد» مطالعه را نشان داد.

---

[1] Grounded Theory

[2] برای اولین‌بار، گِلاسر و اشتراوس «نظریهٔ برآمده از داده‌ها» را با هدف مشروعیت بخشیدن به پارادایم تحقیقات کیفی در سال ۱۹۶۷ معرفی کردند.

[3] Systematic Reduction

[4] Provisional

[5] Triangulation

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

برای انتخاب شرکت‌کنندگان[1]، ابتدا با هشت نفر از مدرسان این درس در چند پردیس، گفتگو شد و راجع به هدف پژوهش و ماهیت آن، توضیح داده شد. اگرچه به دلیل شیوع همه‌گیری کووید-۱۹، همه صحبت‌ها به‌طور مجازی انجام شد، ولی این محدودیت باعث شد که فرصت تعامل با مدرسان چند پردیس پیدا شد. آن هشت نفر، پس از آشنایی با هدف و ماهیت پژوهش که حضور در کلاس پژوهشگر، ثبت‌وضبط تدریس‌ها و وقت برای مصاحبه بود، دونفر از آنان داوطلب شرکت در پژوهش شدند که از مدرسان[2]- «مبانی آموزش ریاضی» دوره کارشناسی آموزش ابتدایی دانشگاه فرهنگیان بودند[3]. سپس به آنها پیشنهاد شد که تمرکز مطالعه بر تدریس ضرب و تقسیم کسرها گذاشته شود و تنها همان چند جلسه ضبط گردد. نویسندهٔ اول بعد از دریافت لینک کلاس‌های مجازیِ دو شرکت‌کننده، در آن کلاس‌ها حضور مجازی یافت و پس از مشاهده و یادداشت‌برداری و تجزیه‌وتحلیل اولیهٔ آن داده‌ها، مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری

در ایران برای این تکنیک، معادل «همسوسازی» انتخاب شده‌است. ولی به‌درخواست نویسندهٔ سوم و با توجه به سابقهٔ تاریخی این واژه که از زمان‌های قدیم در دریانوردی، برای مسیریابی استفاده می‌شده، واژه «مثلثی‌سازی» گزیده شد. این واژه بدین‌گونه که در تاریخ آمده، اهمیتش در این است که مبتنی بر دانش هندسی است، با نام ناپلئون بناپارت شناخته می‌شود و در حوزهٔ علوم‌انسانی و پژوهش‌های کیفی، از آن به درستی استفاده شده‌است و نشان می‌دهد که برای تلفیق رشته‌ها و حوزه‌ها، معنا بر هرچیزی مقدم است.

[1] در منابع روش تحقیق کیفی، بیش از یک دهه است که متداول‌شده که اگر ماهیت پژوهش اقتضا کرد، برای «participant»، از معادل «informant» استفاده شود که در زبان فارسی، معادل مناسب برای واژه اخیر، «مخبر» است و گاهی به آن، «اطلاع‌رسان» هم گفته می‌شود. این درحالی است که «مخبر» در فضای اجتماعی-فرهنگی ایران، بار منفی‌اش بیش از بار مثبت آن است و «اطلاع‌رسان»، جفا در حق کسی است که بی‌بهانه و بدون چشم‌داشت، ساعت‌ها وقت خود را در اختیار دیگری می‌گذارد و اجازه می‌دهد که تمام ریزه‌کاری‌های حرفه‌ای‌اش در معرض قضاوت قرار بگیرد تا حقیقتی آشکار شود. بدین سبب از همان معادل قدیمی استفاده شد.

[2] در این مقاله، به تناسب از واژه «آموزشگر معلم» به جای «مدرس» استفاده می‌شود.

[3] یکی از شرکت‌کنندگان دارای مدرک دکتری آموزش‌ریاضی از کانادا بود که مدرک کارشناسی ارشد ریاضی‌محض با گرایش آنالیز و مدرک کارشناسی دبیری ریاضی داشت. شرکت‌کننده دیگر دارای مدرک کارشناسی ارشد آموزش‌ریاضی و کارشناسی ریاضی‌محض بود و دانشگاه‌های محل تحصیل هر دو، جزو ۱۰ دانشگاه برتر ایران است.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

را تنظیم و اجرا کردند. برای حفظ محرمیت دو شرکت‌کننده، در ارجاع به نظرها یا استفاده از نقل‌قول‌های مستقیم یا نقل‌به‌مضمون صحبت‌هایشان، از نام‌های مستعار یا «ضمیر اول شخص مفرد» استفاده شد.

داده‌های مطالعه از طریق مشاهده کلاس‌های درس دو مدرس، مصاحبه‌های نیمه-ساختاریافته با دو شرکت‌کننده، درس‌نامه‌ها و سایر منابع مورد استفاده آنان در تدریس و یادداشت‌های میدانی نویسندهٔ اول از کلاس‌های درس، جمع‌آوری شدند. مشاهده و یادداشت‌برداری از تدریس‌ها، محدود به زمانی بود که ضرب و تقسیم کسرها تدریس شد، طول هر مصاحبه حدود ٦٠ دقیقه بود و با رضایت مصاحبه‌شونده‌ها، ضبط و بعد پیاده شدند. تنها آن بخش از درس‌نامه‌ها و منابع مدرسان که مربوط به ضرب و تقسیم کسرها بود، به‌عنوان داده مورد استفاده واقع شد و یادداشت‌های نویسندهٔ اول شامل ثبت ایده‌ها و نکات کلیدی مطرح‌شده در کلاس، سؤال‌ها و چالش‌های ایجادشده برای دانشجویان یا آموزشگران‌معلمان و تعامل بین آنان و دانشجویان بود.

به منظور تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، جلسه‌های ضبط‌شدهٔ کلاس‌های مجازی از زاویه‌های مختلف، مورد بررسی واقع شد. همچنین برای پاسخ به سؤال‌هایی که ایجاد می‌شد و شفاف‌نمودن نکته‌های مغفول یا مبهمی که با مشاهده کلاس درس برطرف نشده بود، به سایر داده‌ها مراجعه می‌شد. در چندین مرحله کاهش نظام‌وار داده‌ها و هم‌زمان تلفیق و تفکیک آنها، شباهت‌ها و تفاوت‌ها و موارد ویژه، از زاویه‌های مختلف شناسایی شدند و برای رفع ابهام‌های ایجادشده، به منابع داده‌ها مراجعه شد. برای نمونه، یکی از مدرسان از واژه‌ای فنی استفاده نموده بود که موقع تحلیل، ابهام ایجاد کرده بود. برای رفع این ابهام، به توصیهٔ کوربین و اشتراوس (۱۹۹۰)، مجدداً داده‌ها بازخوانی شدند و ضبط آن بخش از تدریس و متن پیاده‌شدهٔ آن، دوباره بررسی شدند[1]. در نهایت، با یک ریاضی‌دان خبره مشورت شد و با اضافه‌کردن یک پانویس، ابهام برطرف شد. در این فرایند،

[1] با آموزشگر معلمی که آن واژه را در تدریس استفاده کرده بود، تماس گرفته شد و ایشان با کمال لطف و فروتنی، چندین منبع معرفی کردند و دو فایل صوتی نیز ارسال نمودند تا ابهام برطرف شود.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

مضمون‌هایی استخراج می‌شد و دوباره روی‌هم ریخته می‌شد و زاویه دید تغییر می‌یافت تا در نهایت، سه مقوله اصلی شکل گرفتند.

گزارش نتایج

سه مقولهٔ اصلی ظاهرشده مرتبط با اهداف، محتوا و بدفهمی‌های دانشجو-معلمان بود که با توجه به پیشینه پژوهشیِ بررسی‌شده، سه عنوان « نقش باورهای آموزشگران در تدریس ریاضی»، «انتخاب محتوای چالش‌برانگیز برای توسعه مفهومی ضرب و تقسیم» و «شناخت بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان»، برایشان انتخاب شد که نتایج تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، براساس آنها ارائه می‌شود. افزون بر این، برای حفظ محرمیت دو مدرس شرکت‌کننده در این پژوهش، هر جا که به بخشی از مصاحبه‌ها ارجاع داده شده، از نام مستعار «مریم» و «فاطمه» استفاده شده‌است. افزون براین، نقل‌قول‌های مستقیم درون گیومه آمده و آنجایی که نقل‌به‌مضمون شده، برای اطمینان از امانت‌داری در حفظ ماهیت بحث، دو شرکت‌کننده مقاله را خواندند و اگر جایی استنباط نادرستی از صحبت‌هایشان شده بود، اصلاح کردند. در گفت‌وگوهایی نیز که در کلاس، بین آموزشگران و دانشجویان رخ می‌داد و به‌عنوان نمونه و برای درک عمیق‌تر توصیف‌ها، به چند مورد اشاره شده‌است، از نام مستعار یا شماره برای «دانشجو-معلمان» پرهیز گردید، زیرا تمرکز پژوهش برشناسایی و توصیف نقش آموزشگران ریاضی بود و تحلیل با مرکزیت آنها انجام شد و به‌جای آن، تصمیم گرفته‌شد که اگر پاسخ توسط یک دانشجو داده‌شده بود، به «دانشجو» و اگر چند نفر یا همه به آن پاسخ داده‌بودند، به «دانشجویان» ارجاع داده‌شود.

مقوله اول: نقش باورهای آموزشگران معلمان در تدریس ریاضی

مشاهده کلاس‌های درس دو شرکت‌کننده در این مطالعه، پژوهشگران را به اهمیت نقش باورهای آنان در تدریس ریاضی خود، واقف نمود. این دو آموزشگر معلمان، بر اساس اهداف و باورهای آموزشی خود، کلاس‌هایشان را برنامه‌ریزی و تکلیف‌ها را

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

طراحی می‌کردند که در نتیجه، پرسش‌وپاسخ‌های کلاسی نیز حول همین محور شکل می‌گرفت. برای مثال، مریم در رابطه با هدف کلی خود از تدریس به دانشجو–معلمان آموزش ابتدایی در درس ریاضی، بیان کرد که «من چیزی که از یک معلم ریاضی ابتدایی انتظار دارم اینه که بتونه مستقل از کتاب باشه . . . خودش ایده داشته‌باشه، بتونه کتابو نقد کنه و با توجه به اطلاعاتی که به‌دست می‌آره، یه جاهایی رو عوض کنه، یه جاهایی رو بنا به ضرورت تکمیل کنه، یه جاهایی رو تغییر بده». از نظر وی، «کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی پر از اِشکاله و وقتی معلمان وابسته به این کتاب‌ها باشن، اشتباهات کتاب‌ها رو تشخیص نمی‌دن و اونارو اصلاحشون نمی‌کنن». بدین سبب، مریم هدفش این بود که آنقدر «علم و دانایی و آگاهی» به دانشجو–معلمان بدهد تا قدرت این را داشته‌باشند که بتوانند از منظری بالاتر به ریاضیِ دوره ابتدایی نگاه کنند. او به دنبال این بود که دانشجو– معلمان بدانند چرا و با چه منطقی، تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب‌های درسی ریاضیِ ابتدایی طراحی شده‌اند تا بتوانند در مورد تدریس و آموزش آنها، تصمیم مناسب بگیرند و اگر دلیل موجه آموزشی برایشان نیافتند، آنها را یا جرح‌وتعدیل یا تغییر دهند تا به یادگیری عمیق‌تر و مفهومی دانش‌آموزان کمک کنند. به گفتهٔ مریم، «حتی مؤلفان، با ایده‌های ریاضی و آموزشی تمرین‌ها و فعالیت‌های برخی از کتب، اطلاعی ندارند و تنها از کتاب‌های کشورهایی مثل سنگاپور، کپی‌برداری شده‌است». ولی انتظار وی این بود که «مؤلفین کتاب‌های اصلی که کتب ما کپی‌برداری از آنها هستند، ایده‌هایی را برای نوشتن فعالیت‌های مختلف داشته‌باشند» و بدین جهت، بر این باور بود که «یک معلم، باید بدونه پشت این فعالیت‌ها چه چیزی هست . . . چه نظریه‌ای» و البته تصریح کرد که «نظریه در حد نظریه‌پردازی نه! در حد این که بدونه چه مفهوم آموزش ریاضی، چه مفهوم ریاضی پشتش هست» تا بعد بتواند «اگه لازم شد، یه جاهایی‌شو خودش تغییر بده.»

تدریس مریم، تحت‌تأثیر این تفکرش بود و آن را در پایان هر چالشی که در کلاس مطرح می کرد، در قالب تکلیف و پروژه تعقیب می‌کرد. مثلاً وقتی مریم به قسمتی رسید که با توجه به مفهوم ضربِ کسرها، به دنبال یافتن الگوریتم آن بود، تا جایی که

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

احساس کرد لازم است، دانشجویان را راهنمایی کرد و بعد، کشف الگوریتم را به عنوان تکلیف گروهی، به عهده آنان گذاشت. مریم برای این روش، دو فایده می‌دید؛ اول این که استقلالی را که برای یادگیرنده به عنوان هدف کلی به آن اشاره کرده بود دنبال می‌کرد و از طرف دیگر، دانشجویان فرصت داشتند تا در فعالیت‌های گروهی، ایده‌های سایر هم‌گروهی‌های خود را بشنوند و ایده‌های خود را پالوده کنند و بدین ترتیب، ایده پروژه–محور بودن تدریس را تا حدودی به اجرا گذارد.

همچنین، فاطمه اشتراک نظر زیادی با مریم داشت و او هم باور داشت که اگر ادعایی در کلاس می‌کند، باید خودش هم بتواند آن را اجرا کند. فاطمه با هدف «آموزشِ معلمی‌کردن و کمک به دانشجو–معلمان برای ساختن دانش خود و مداومت در رشد این دانش»، تدریس خود را برنامه‌ریزی و اجرا می‌کرد. ولی تفاوت قابل‌توجه‌ای در رویکرد فاطمه با مریم وجود داشت که ریشه در تجربه چندسال معلمیِ تمام‌وقت در دوره ابتدایی و تدریس ریاضی به کودکان داشت و از این جهت، اهدافش را به‌گونه‌ای متمایز از مریم دنبال می‌کرد. برای مثال، فاطمه تدریسش را طوری طراحی کرده بود که دانشجویان احساس کنند در سفری به یک کلاس درس واقعی، با او همراه هستند؛ کلاسی که فضا توسط وی چیده شده بود. در حالی که مریم تصمیم‌گیری در مورد کلاس درس را به خود دانشجو–معلمان می‌سپرد. این تفاوت، ریشه در تجربه‌های زیسته این دو آموزشگر ریاضی داشت که در دو موقعیت مختلف، ریاضی تدریس کرده بودند. فاطمه در دورهٔ ابتدایی تدریس کرده بود و شناخت ملموسی از یادگیری ریاضیِ کودکان داشت، در حالی‌که مریم، تجربه غیرمستقیم با یادگیری کودکان داشت که از طریق مطالعه و ارتباط با معلمان ابتدایی و برگزاری دوره‌های آموزش‌های ضمن‌خدمت و تجربه تحصیلی و پژوهشی خود در حوزهٔ یادگیریِ کودکان دورهٔ ابتدایی داشت. تجربه‌های متفاوت این دو، به ایجاد دانش منحصربه‌فردی برای هرکدام منجر شده بود که باوجود ماهیت یکسان، تجلی‌های متفاوت داشت و متکی به باورهای آموزشیِ آن دو بود. مریم تدریس خود را بر اساس باورهای نظری خود طراحی می‌کرد، در حالی

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

که فاطمه به کمک تجربه‌های عینی که از تدریس در دورهٔ ابتدایی کسب کرده بود، باورهایش شکل گرفت و دیدگاه نظری‌ای که حامی آن باورها باشد، پیدا نمود. در حقیقت، رویکرد شناختی به یادگیری ریاضی، توجیه‌کنندهٔ باورهای هر دو آموزشگر معلمانی بود که یکی با باورداشتن به الزامات رویکرد شناختی، تدریس را طراحی و تجربه می‌کرد و دیگری از بطن تجربه‌های عملی تدریس خود، به باورهایی رسیده بود که منطبق با مفروضات رویکرد شناختی بود.

مقوله دوم: انتخاب محتوای چالش‌برانگیز برای توسعه مفهومیِ ضرب و تقسیم

دانشجو-معلمانی که در دورهٔ کارشناسیِ آموزش ابتدایی تحصیل می‌کنند، از یکی از رشته‌های شاخهٔ نظری متوسطه و از طریق آزمون سراسری ورود به دانشگاه- کنکور- پذیرفته می‌شوند و در طول آموزش عمومی خود، فرض بر این است که ضرب و تقسیم کسرها را یاد گرفته‌اند. بنابراین آموزش ضرب و تقسیم به آنها، با آموزش به کودکان ابتدایی که برای اولین‌بار با این مفاهیم آشنا می‌شوند، متفاوت است. از این جهت، انتخاب محتوای مناسب که بتواند چگونگی و چیستی دانش آنان را به چالش بکشد، نیازمند مهارت و توانمندی ویژه‌ای است که لازم است آموزشگران معلمان ریاضی، از آن برخوردار باشند. مقوله انتخاب محتوای چالش‌برانگیز برای دانشجو-معلمان، شامل ابعاد گوناگونی بود که در سه زیرمقوله، معرفی می‌شوند.

- **ارائه بازنمایی‌ها و تفسیرهای مختلف**

روش‌های فکرکردنِ افراد به ریاضی متفاوت است و باعث می‌شود که نوع فهم و درک و حل مسئله آنان، با هم تفاوت اساسی داشته‌باشد. بنابراین دانستن این واقعیت و آشنایی با طیف وسیع دانشی که دانشجو-معلمان با آن وارد دانشگاه می‌شوند، به آموزشگران ریاضیِ معلمان ابتدایی کمک می‌کند تا با محتوای متنوع‌تری، دانشجویان را به چالش بکشند. علاوه بر این، معرفی مفاهیم ریاضی برای آموزشگران ریاضی، ممکن است چالش بیشتری نسبت به معلمان کلاس درس، ایجاد کند. علت این چالش این است که آموزشگران، با دانشجویانی مواجه هستند که ریاضی مورد تدریس را قبلاً یاد

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

گرفته‌اند یا حداقل فکر می‌کنند که می‌دانند[1]. به‌طور مثال، هر دو آموزشگر نظرشان این بود که در آموزش ضرب کسرها به دانشجو–معلمان، ضروری است که توجه آنها را به رابطهٔ بین الگوریتم ضرب با درک مفهومی فرآیند ضرب کسری، جلب نمود و بر اهمیت استفاده از نمایش‌ها یا بازنمایی‌های مختلف کسرها از جمله مدل‌های مساحتی، نسبت‌ها، عملگرها و تفسیرهای متنوع از ضرب مانند ضرب به‌مثابه جمع‌های مکرر یا مدل‌های مساحتی و آرایه‌ایِ ضرب، تأکید نمود. افزون بر این، دو آموزشگرِ شرکت–کننده در این پژوهش، اظهار داشتند که یکی از چالش‌های خود آنها، انتخاب مثال‌ها و استفاده از بازنمایی‌های مناسب برای تدریس به دانشجو–معلمان است.

مشاهدهٔ کلاس‌های درس هر دو آموزشگر نشان داد که آنها، از تفسیرها و نمایش‌ها و بازنمایی‌های متنوع برای ارائه مفاهیم و رویه‌های ریاضی، با ظرافت و به‌موقع استفاده می‌کردند از آنها در تدریس، برای بازکردن ایده‌های ریاضیِ نهفته در مفاهیم و رویّه‌ها، کمک می‌گرفتند. با این رویکرد، بسیاری از ابهام‌های دانشجو–معلمان در رابطه با مبحث ریاضی که مورد بررسی بود، برطرف می‌شد و درک‌های ناقص، اصلاح می‌گشت. همچنین، این رویکردِ تدریسی، در جهت شناختن درک و فهم‌های متنوعِ دانش‌آموزان توسط دانشجو–معلمان بود و به آنها فرصت می‌داد تا دانش ریاضی را به دانش ریاضی برای تدریس، تبدیل کنند.

به عنوان مثال، فاطمه برای شروع آموزش ضرب کسرها، ابتدا از دانشجویانش که قبلاً با این موضوع روبه‌رو شده بودند و این اولین برخورد آنها با ضرب کسرها نبود. خواست که ضرب $2 \times 1/3$ را با یک مثال دنیای واقعی، معنی کنند. دانشجویان که همگی، ضرب کسرها را می‌دانستند، در پاسخ فاطمه، گفتند که «۲ در صورت کسر ضرب می‌شود»، ولی وقتی فاطمه از آنها خواست تا خودشان را جای دانش‌آموزان ابتدایی بگذارند و حدس بزنند که اولین مواجهه آنها با ضرب $2x1/3$ چگونه خواهد

[1] اسمیت (۲۰۰۳)، ویلسون و بال (۱۹۹۶) و زاف (۲۰۱۰) نیز در پژوهش‌های خود، این چالش را شناسایی کرده بودند.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

بود، یکی از آنها پیش‌بینی‌اش این بود که احتمالاً «به ۲ مخرج یک می‌دهند و صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می‌کنند». فاطمه در حالی که به شوخی می‌گفت که «باید دانش‌آموزان نابغه‌ای باشند که در اولین مواجهه چنین برخوردی می‌کنند»، توضیح داد که منظورش از این سؤال این بود که دانش‌آموزان، چه درکی از «معنی ضرب» ممکن است داشته باشند. اتفاق قابل تأملی که رخ داد این بود که چون دانشجویان، الگوریتم ضرب کسرها را می‌دانستند، دانش قبلی‌شان مانع از آن شده بود که به معنی ضرب فکر کنند. در این موقع، فاطمه یکی از دانشجویان را مخاطب قرار داد و سؤال کرد که اگر دانش‌آموز از شما پرسید که« ۴×۲ یعنی چه؟»، چه جوابی به او می‌دهید؟ و او پاسخ داد که می‌گویم مثلاً ۲ جعبه مداد رنگی که در هر کدام، ٤ مداد وجود دارد» و فاطمه ادامه داد که «خب اگر پرسید که $2 \times 1/3$ یعنی چی؟ بهش چی می‌گین؟» و دانشجو پاسخ داد برایش از این تمثیل استفاده می‌کنم که «یعنی دو تا دایره که هر کدام، یک سومش رنگ شده». فاطمه بازهم گفت‌وگو را تا رسیدن به یک نتیجه، پیش برد و پرسید «که می‌شه چقدر؟» و دانشجو گفت «می‌شه ۲/۳». سپس فاطمه، بدون آن‌که توضیحی بدهد، از دانشجو تشکر کرد و راجع به پاسخ وی، قضاوتی نکرد. فاطمه همان‌طور که در بیان اهدافش گفته بود، بر این باور بود که در یک تدریس کارآمد، معلم تسهیل‌گر است و در ضمنی که یادگیرندگان را تنها رها نمی‌کند، بستر را به‌گونه‌ای فراهم می‌سازد تا آنها، بتوانند مسئولیت یادگیری خود را به عهده بگیرند و نسبت به ساخت‌وساز دانش خود، احساس مالکیت کنند.

با این نگاه و پرسش‌وپاسخی که انجام شد، دانشجویان به سمت معنی‌کردن مفهوم ضرب کسرها، هدایت شدند و مثال‌های دیگری زدند که یکی از آنها، تبدیل ضرب $2 \times 1/3$ به جمع دو کسر $1/3$ بود. پس از آن‌که همهٔ دانشجویان فرصت یافتند تا ایده‌های خود را راجع به این ضرب بگویند، آنگاه مدرس در تکمیل مثال‌هایی که در کلاس مطرح شد، توضیحاتی داد و بر این نکته تأکید نمود که بسیاری از مسئله‌ها، راه‌حل‌های منحصربه‌فرد ندارند و برای مسئله‌هایی که ریشه در دنیای واقعی دارند، این تنوع بیشتر است.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

نوع برخورد فاطمه با حل مسئله، می‌توانست رویکرد نویدبخشی برای پاسخگویی به دغدغه‌های مریم هم باشد که نگران پایین‌بودن اعتمادبه‌نفس دانشجویانش بود. زیرا با دانستن این که بیشتر مسئله‌ها تنها یک راه‌حل مشخص ندارند و تنوع راه‌حل‌ها توسط کلاس و آموزشگر کلاس، با اهمیت تلقی می‌شود و با طرحشان در کلاس، نه تنها مورد تمسخر یا اعتراض واقع نمی‌شوند، بلکه تشویق به طرحشان و امکان نقد و پالوده‌شدن-شان را به کمک سایر دانشجویان و آموزشگر کلاس پیدا می‌کردند. این کار باعث می-شد که با افزایش اعتمادبه‌نفس، ترس‌شان هم به تدریج کاهش یابد. در مجموع، با وجود نزدیکی زیادی که بین دیدگاه‌های نظریِ فاطمه و مریم در مورد آموزش معلمان ریاضی وجود داشت، تفاوت‌های ظریفی وجود داشت که به چند مورد اصلی، اشاره می‌شود:

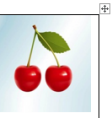
فاطمه با اشاره به تنوع مثال‌ها و بازنمایی‌هایی که دانشجویان به‌کار بردند، و با استناد به مشاهدات و تجربه‌های خود از تدریس در دوره ابتدایی، ابراز نمود که «بچه‌ها، این ضرب را به صورت دو تا قطعه $1/3$ می‌بینند و فراموش نکنید که دانش‌آموزان، اینجا تکنیک نمی‌دانند و در ابتدا، درگیر صورت و مخرج نمی‌شوند» از دانشجویان خواست که در بازنماییِ تفسیرهای $2 \times 1/3$ ، عجله نکنند و اجازه بدهند که دانش‌آموزان فکر کنند و سعی کنند معنی این نوع ضرب را بفهمند. در صورتی که مریم معتقد بود دانشجو-معلمان، خودشان باید متناسب با شرایط کلاس و دانش‌آموزان آن، عمل کنند. این تفاوت نگاه، در تبیین اهداف و باورهای مریم و فاطمه نسبت به تدریس و نقش و جایگاه آموزشگر معلمان، قابل مشاهده بود.

افزون بر این، فاطمه در تفسیرهای مختلف خود از ضرب کسرها، از فرمول و تکنیک حرفی نمی‌زد و تأکید داشت که ابتدا، لازم است دانش‌آموزان معنی ضرب و تقسیم کسرها را بفهمند و درک کنند و استفاده از مثال‌های دنیای واقعی، به این کار، کمک می‌کند. در حالی که قبل از چنین درکی، حفظ کردن قاعده‌ها و فرمول‌ها، ذهن را بیشتر از دانستنی‌های غیرمتصل انباشته می‌کند و الزاماً، به توسعه و تعمیق معنا منجر

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

نمی‌شود. مریم نیز مانند فاطمه، دانستن مفهوم را لازم می‌دانست زیرا به بیان او، «ممکن است گاهی الگوریتم ها فراموش شوند». به همین دلیل، در تدریس خود، تلاش می‌کرد تا او هم از مثال‌های دنیای واقعی و بازنمایی‌های ملموس استفاده کند. بعد از این، فاطمه برای معنی کردن ضرب کسر در عدد، مدل زیر را به‌کار برد و به دانشجویان گفت که آن را «از یک دوست فراگرفته» و در تدریس خود به دانش‌آموزان دوره ابتدایی، از آن «استفاده کرده و نتایج خوبی گرفته است». بیان صادقانهٔ فاطمه در کلاس، برای دانشجو–معلمان اهمیت آموزشیِ زیادی داشت که بدانند هیچ معلمی «همه‌چیردان» نیست و بر اثر مشارکت و تعامل با همکاران و یادگیرندگان، یادگیری‌اش گسترده می‌شود.

فاطمه: به این شکل دقت کنید!

	×
	۲
	۲$\frac{۱}{۲}$
	۳

فاطمه: دو برابر این گیلاس‌ها، چندتا می‌شه ؟

دانشجویان: ٤ تا

فاطمه: ۳ برابر گیلاس‌ها چندتا می‌شه؟

دانشجویان: ٦ تا

فاطمه: حالا به نظرتون $\mathbf{۲\frac{۱}{۲}}$ برابر گیلاس‌ها چندتا می‌شه؟

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

دانشجویان: ۵ تا

فاطمه: چرا؟ چطور فهمیدین؟

دانشجو: چون بین ٤ و ٦ است

دانشجو: من اول گیلاس‌ها را دو برابر کردم، شد ٤ تا. بعد نصف گیلاس‌ها را هم پیدا کردم، شد یکی. بعد اینا رو با هم جمع کردم، شد ۵ تا.

وقتی آن دو دانشجو راه‌حل خود را در مورد این مسئله، با کلاس به اشتراک گذاشتند، دانشجویان دیگر از آنها الگوبرداری کردند. پس از این مشاهده شد که وقتی فاطمه مسئله مشابه دیگری را برای کلاس مطرح کرد، دانشجویان بیشتری آماده مشارکت و پاسخگویی شدند.

فاطمه حین تدریس، عکس‌العمل‌های احتمالیِ کودکان را نسبت به این سؤال، با دانشجویان بازگو کرد.

از این گذشته، ویژگی دیگر تدریس فاطمه این بود که در حین تدریس، یافته‌های جدید پژوهشیِ مرتبط با موضوع مورد بحث را در کلاس، در اختیار دانشجویان قرار می‌داد. مثلاً وقتی یکی از دانشجویان سعی داشت ضرب $\mathbf{۲ \times ۲\frac{۱}{۲}}$را با خاصیت توزیع-پذیری توضیح دهد، فاطمه به نتایج تحقیقی جدیدی که نشان داده بود کودکان قبل از مدسه، جبر[1] را می‌فهمند و می‌توانند از آن استفاده کنند، اشاره نمود و بیان کرد که «اما وقتی آن را به صورت قانون درمی‌آوریم، برایشان قابل درک نیست». فاطمه نتایج این تحقیق را با تجربه خود در کلاس تلفیق کرد و به دانشجویان گفت که در آینده که معلم شدند، در تدریس خود به این نکته توجه کنند که با وجودی که کودکان مفهوم قانونی مانند «توزیع‌پذیری» را درک می‌کنند، اما مطرح کردن آن در کلاس، می‌تواند باعث

[1] Early Algebra

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

«گیجی» دانش‌آموزان شود. ولی این توصیه، سبب نشد که او، از دقت لازم در تدریس بکاهد و به دانشجویان کمک می‌کرد تا از زبانی که از نظر ریاضی درست و قابل درک است، استفاده کنند. فاطمه دقت زبانی را برای توجه به «ریاضی به‌عنوان ارتباطات»، لازم می‌دانست و وقتی آنها از زبانی مبهم استفاده می‌کردند، به آنها کمک می‌کرد تا آن ابهام را برطرف کنند و به تدریج، سطح ارتباط را از طریق شفافیت در زبان، ارتقا دهند، زیرا یک جنبه مهم معلمی را برقراری «ارتباط» مؤثر با یادگیرنده می‌دانست.

ولی برخلاف فاطمه، مریم مخالف ورود به جزئیاتِ وابسته به برنامه و کتاب درسی و در این مورد خاص، ضرب و تقسیم کسرها بود. مریم نظرش این بود که به جای تکیه بر هر نمایش یا بازنمایی مفهومی مربوط به این مبحث که در کتاب درسی ریاضی ابتدایی به آن پرداخته شده، روش کلی را که همیشه و برای همه حالت‌های ضرب و تقسیم درست است، در کلاس به بحث بگذارد زیرا مریم باور داشت که یکی از تفاوت‌های مهم بین دانشجو–معلمانی که در آینده، می‌خواهند مباحث پایه‌ای ریاضی را در دوره ابتدایی تدریس کنند و دانش‌آموزانی که مخاطب آن تدریس خواهند بود، «سن» است که گروه اول بزرگ‌سال و گروه دوم، کودک هستند. در واقع، او آگاهانه وارد مباحث پیشرفته‌تری می‌شد که مخاطبش کودکان نبودند، ولی لازم می‌دید که معلمان، بر آنها مسلط باشند تا بتوانند با دانش‌آموزانی که راه‌های اندیشیدن و فهمیدنشان با هم فرق دارد و تقریباً این تنوع را می‌توان در هر کلاس عادی هم مشاهده کرد، با اثربخشیِ بیشتری تدریس کنند. رویکرد مریم این بود که دانشجویان که معلمان آینده هستند، لازم است که با روش‌های کلی، روش‌های استفاده شده در کتاب درسی و روش‌های ابداعی توسط دانش‌آموزان آشنا شوند تا بتوانند در کلاس و حین تدریس، بنا به موقعیت‌های برآمده از تدریس، بهینه‌ترین تصمیم‌ها را بگیرند. با این استدلال، ابتدا روش‌های کلی را برای ضرب و تقسیم کسرها و با کمک نمایش‌ها یا بازنمایی‌های مبتنی بر مفهوم، ارائه نمود. مریم با ظرافت، اصول را با نمایش‌های مفهوم و مثال‌های ملموس درهم‌می‌آمیخت و به معلمان آینده، عرضه می‌کرد. با این وجود، به آنها تأکید می‌نمود که «نیازی نیست به کودکان همه مفاهیم گفته شود و این تصمیم‌گیری، به عهده

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

معلمان آینده» است. او ابراز نمود که اگر معلمی تشخیص بدهد که درک مفهوم ضرب و تقسیم کسرها برای کودکان پایه‌های پنجم و ششم زیادی سخت است و تصمیم بگیرد که ابتدا الگوریتم ضرب و تقسیم کسرها را بگوید و کمک کند تا در دانش‌آموزان مهارت ایجاد کند و وقتی زمینه لازم در دانش‌آموزان فراهم شد، آنگاه به توسعه مفهوم از طریق همان الگوریتم بپردازد، تصمیش قابل احترام است. ولی برای معلم ضروری است که دانش و مهارت لازم را برای تصمیم‌گیری در چنین مواردی، داشته‌باشد. این دانش از نظر مریم، همان «دانش پداگوژی محتوا» بود که مسئولیت آموزشگران ریاضی، ایجاد و توسعهٔ آن در دانشجو–معلمان است که به یک نمونه از آنچه که او در کلاس انجام داد، اشاره می‌شود:

مریم: یادتونه در ضرب اعداد طبیعی، **۲×۳** کدام یک کاردینال بود؟ اون یکی دیگه چی بود؟

دانشجو: اولی کاردینال بود، دومی شماره دسته

دانشجو: کاردینال عدد دوم بود

دانشجو: یکی کاردیناله یکی عدد دسته

دانشجو: اولی شماره دسته و دومی کاردینال

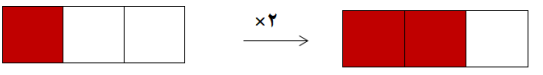
مریم: قرار داد می‌کردیم دومی را کاردینال بگیریم که نمایشش می‌دهیم، اولین عدد را شماره دسته می‌گیریم یا عددی که روی عدد دوم اثر می‌کند. اینجا من ۲ را نمایش می‌دم، هر چی که کاردینال باشه، می‌تونم نمایشش بدم. با ابزار آموزشی یا شکل. عدد ۳ می‌گه چند دسته یا چند برابر. بنابراین به صورت عملگر داره اثر می‌کنه. خودش کاردینالی را نشون نمیده . . . پس عدد ۳ نشون می‌ده چند برابر شده و کاردینال نیست و جوابی که می‌ده، خودش کاردیناله، چون من ٦ تا را می‌تونم نمایش بدم.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

مریم بعد از این بخش، ارتباط «کاردینال» و «شماره دسته» را با ضرب کسرها، نشان داد:

«عیناً چنین چیزی را در ضرب کسرها داریم. عدد اول عملگرمون هست که تو عدد دوم اثر می‌کنه و حاصلی که می‌ده، کاردینالیه[1] که می‌تونه نمایش داده بشه»، ادامه داد که «با این توضیح[2]، در ضرب 2 x1/3، کدوم کاردیناله»؟ بعد از این که یکی از دانشجویان پاسخ داد که «۱/۳»، مریم ضمن تأیید آن که «بله عدد دوم کاردیناله»، به تدریس این مبحث ادامه داد:

قبل از هر چیز باید در تمام عملیات جمع و تفریق و ضرب و تقسیم، واحد مشخص باشه. این مورد در کسرها، خیلی مهمه. بنابراین، واحد را مشخص می‌کنیم و بعد، سه قسمت مساوی می‌کنیم و یک قسمت از سه قسمت را رنگ می‌زنیم (مریم هم‌زمان با این توضیحات، شکل‌های زیر را رسم کرد). تا اینجا فقط عدد دوم را نمایش دادیم. حالا عدد دوم را روی عدد اول می‌خواهیم اثر بدیم. عدد دوم چی می‌گه؟ می‌گه هر چی هست را دو برابر کن. خب من این ۱/۳ را دو برابر می‌کنم و می‌ذارم توی واحد ببینم تو واحد، الان چه کسری رو نشون می‌ده؟



دانشجویان پاسخ دادند «۲/۳» و مریم در تکمیل آن، تأکید کرد که «یعنی دو تا تک جزء ۱/۳ همان ۲/۳» است و توضیح داد که:

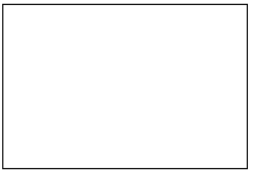
[1] طبق تعریفی که در نظریهٔ مجموعه‌ها بیان می‌شود، «عدد کاردینال» عدد حسابی (اعداد طبیعی و صفر) است و شامل اعداد کسری نمی‌شود.

[2] مریم که آموزشگرِ معلم بود، برای کاردینال یک «توضیح» یا «تعبیر» ارائه داد و سپس طبق آن، ادامه داد.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

مریم: این، حالت خاصی از ضرب کسر بود که عدد اول، یک عدد کامل بود. البته فرقی نمی‌کنه! همیشه تو کسرها، عدد دوم را نمایش می‌دیم، بعد عدد اول را روش اثر می‌دیم . . . حالا حالت کلی‌تر را ببینیم که «اگر هر دو عدد حاصل‌ضرب کسر باشد. مثلاً ۱/۲X۲/۳» را داریم. اول چکار کنم؟

دانشجو: واحد را تعیین کنیم. (مریم با پاسخ دانشجویان، شکل زیر را روی تابلو رسم کرد.)

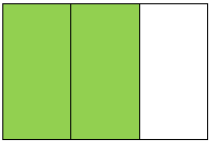


مریم: مرحله دوم چکار کنم؟

دانشجو: نمایش ۲/۳

مریم: بله نمایش ۲/۳ با توجه به واحد. پس واحد را به ۳ قسمت تقسیم می‌کنم و دو قسمتش را رنگ می‌کنم. واحد خیلی مهمه! مرحله سوم؟

دانشجو: عملگر را اثر می‌دیم.

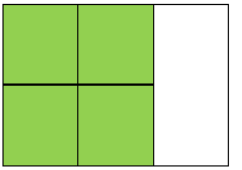


[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

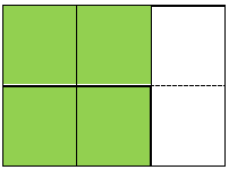
مریم: عملگر را روی چی اثر می‌دیم ؟ این خیلی مهمه! روی واحد یا روی ۲/۳

دانشجو: روی ۲/۳.

مریم: آهان! ببینین! روی ۲/۳. یعنی شما در مرحله سوم، چشمتونو روی واحد می‌بندین. «ما ۱/۲ واحد رو حساب نمی‌کنیم، اینجا باید فقط ۱/۲ را بر عدد دوم یعنی ۲/۳ اثر بدیم.»



پس نصف عدد دوم را در شکل رنگ می‌زنیم و یک مرحله چهارم داره. حالا بگین چقدر از کل می‌شه؟



دانشجو: ۲/٦

مریم: بله ۲/٦ یا کسر معادلش ۱/۳.

مریم در پایان تدریس این مبحث، پس از تأکید بر چهار مرحله انجام ضرب کسرها شامل «تعیین واحد»، «نمایش حاصل‌ضرب»، «اثردادن عملگر» و «تعیین جزء از کل»، گفت که «پس این چهار مرحله را در نظر داشته‌باشید. ببینید سختیِ ضرب اینه که شما اول طبق واحد، عدد دوم را پیدا می‌کنین، اما تو مرحله سوم، انگار عدد دوم می‌شه

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

واحد شما». مریم در مصاحبه‌هایش هم بیان نمود که به دلیل تغییر واحدها در مرحله‌های سوم و چهارم، ضرب کسرها را از نظر مفهومی، سخت‌تر از تقسیم و حتی جمع و تفریق کسرها، می‌داند. علاوه بر مریم، فاطمه نیز به استناد تجربه‌ای که از تدریس در پایه‌های ابتدایی داشت، نظرش این بود که مفهوم ضرب کسرها، برای کودکان بسیار سخت است و در نهایت، اکثر کودکان تنها الگوریتم ضرب و تقسیم کسرها را از بَر کرده و حفظ می‌کنند.

- **انتخاب مثال‌های مناسب**

با وجود تفاوت رویکردهای فاطمه و مریم به تدریس ریاضی به دانشجو-معلمان دوره ابتدایی، هر دو نقش ویژه‌ای برای «مثال» در آموزش مفاهیم ریاضی، قائل بودند. فاطمه در مورد چگونگیِ انتخاب مثال مناسب برای تدریس، ابراز نمود که «سعی می‌کنم مثال‌ها در حد دبستان باشه، ولی می‌دونم برای بزرگ‌سال هم چالش داره. مثال ساده سعی می‌کنم استفاده نکنم که خیلی براشون واضح باشه. یا اگر مثال ساده می‌آرم، می‌دونم مفهومشو بلد نیستن، تکنیک بلدن و روی مفهوم مانور می‌دم». رویکرد فاطمه به تدریس، استفاده از روش اکتشافی بود و اگرچه همیشه مجموعه‌ای از مثال‌های مناسب را آماده داشت، ولی چون تدریس با مشارکت دانشجویان پیش می‌رفت، خیلی از اوقات، لازم بود در لحظه و به کمک تجربه‌اش، مثال‌های جدیدی تولید کند که از قبل آماده نکرده بود. تبحر فاطمه، طراحی مثال‌ها در سطوح مختلف بود و تا اطمینان از این‌که دانشجویان به درک قابل قبولی از تدریس آن نرسیده‌اند، سطح مثال را تغییر می‌داد تا این هدف محقق شود.

همچنین مریم، با وجودی که یک روش کلی را در تدریس ضرب و تقسیم کسرها به‌کارگرفت، ولی هرجا که احساس نیاز می‌کرد، از مثال‌های متنوع و متناسب با موقعیتی که کلاس در آن قرار می‌گرفت، استفاده می‌کرد.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

به طور خلاصه، مشاهدات نویسندهٔ اول از کلاس‌های درس فاطمه و مریم نشان داد که استفاده از مثال، بخشی مهم از جریان تدریس بود و انتخاب آن، بستگی به نیازهای دانشجویان داشت.

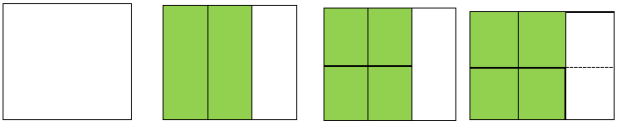
- **کشف الگوریتم**

اکثریت نزدیک به اتفاق دانشجویان، الگوریتم‌های مربوط به ضرب و تقسیم کسرها را می‌دانستند، اما خیلی از آنها نمی‌دانستند که چرا آن الگوریتم‌ها درست هستند و چگونه تولید شده‌اند. فاطمه در همه قسمت‌های تدریسش، به دانشجویان تأکید می‌کرد که دانش‌آموزان را پیش از یادگیری دقیق مفهوم، درگیر الگوریتم‌ها و رویه‌ها نکنند. او حتی شروع تدریس ضرب‌ها را با مسئله، درست نمی‌دانست، چون می‌گفت که در مدرسه ابتدایی، شروع تدریس ضرب را با مسئله تجربه کرده بود و آن کار، باعث شده بود که کودکان، نتوانند بین مفهوم ضرب کسرها و الگوریتم آن، رابطه برقرار کنند.

فاطمه برای برقراری مفهوم با الگوریتم و توجیه کارایی الگوریتم‌ها، دانشجویان را به کشف الگوها، تشویق کرد. او با محاسبه چند ضربِ کسرها از طریق مفهوم و نوشتن آنها در یک قاب، از دانشجویان خواست که ارتباط بین الگوریتم‌هایی که از قبل می‌دانستند، با مفاهیمی که آموخته‌اند، پیدا کنند و اگر توانستند، بین مفهوم و الگوریتم، ارتباط برقرار کنند. البته در مصاحبه، فاطمه گفت که اکثر دانشجویان، نتوانستند چنین ارتباطی را درک کنند.

اما مریم، همان‌طور که بازنمایی‌ها را متناسب با مخاطب بزرگ‌سال انتخاب کرده بود، در مرحله کشف الگوریتم‌ها هم بیشتر انتزاعی عمل کرد. مریم با توجه به حاصل ضرب ۱/۲x۲/۳ و شکلی که با پاسخ‌های دانشجویان در مراحل مختلف رسم شد، از دانشجویان خواست سعی کنند تا بین شکل رسم شده و به دست آوردن حاصل‌ضرب با کمک مفهوم و الگوریتم ضرب که از پیش می‌دانند، ارتباط برقرار کنند. او ضمن توضیح کوتاهی به منظور راهنمایی دانشجویان، توضیحات کامل‌تر را به عنوان تکلیفِ گروهی، به عهده آنان گذاشت.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]



$$\text{الگوریتم ضرب کسر} = \frac{\text{تعداد تک جزءهای حاصل عمل}}{\text{تعداد کل تک جزءها}} = \frac{\text{حاصل ضرب صورت ها}}{\text{حاصل ضرب مخرج ها}}$$

مریم با توجه به شکل و تک‌جزءهای‌ایجاد شده و مفهومی که از ضرب کسرها استنتاج می‌شود، الگوریتم ضرب کسر را استخراج کرد. روش‌های فاطمه و مریم تفاوت اساسی با هم داشت، اگرچه هر دو بدیع بودند.

مقوله سوم: شناخت بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان

در اکثر چارچوب‌های تبیین‌شده برای توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی، دانش آنان نسبت به بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان، به‌عنوان یکی از مؤلفه‌های اصلی درنظر گرفته‌شده است. این در حالی است که دانشجویان نیز دارای بدفهمی‌های انباشته‌شده‌ای هستند که طی سال‌های تحصیلشان در مدرسه و دانشگاه، شکل گرفته و فرصتی برای بروز آنها و شناختشان در جهت رفعشان، ایجاد نشده است. دو آموزشگر به این مسئله واقف بودند که «بدفهمی‌هایی که بچه‌ها دارن، دانشجوها هم داشتن. چون جایی نداشتن تا در مدت تحصیل، بدفهمی‌ها را برطرف کنن. اما برای این‌که تدریس مؤثری داشته باشن، باید بدفهمی‌هاشون اصلاح بشه». بدین سبب در تدریس خود، موقعیت‌هایی ایجاد می‌کردند که فرصت شناسایی بدفهمی‌های دانشجویان و برطرف نمودنشان، فراهم شود. این آموزشگران، برای شناسایی بدفهمی‌های دانشجویان، از دانش نظری و دانش تجربی خود که مبتنی بر تجربه‌های عملی کلاس درسشان بود، استفاده می‌کردند که در دو زیرمقوله، به آنها پرداخته می‌شود.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

- **دانش نظری**

یافته‌های پژوهشی اخیر در مورد بدفهمی‌های دانش‌آموزان در یادگیری ضرب و تقسیم کسرها، منبع اصلی آموزشگران، برای شناساییِ بدفهمی‌های دانشجو–معلمان بود. فاطمه با استفاده از نتایج این پژوهش‌ها، مثال‌هایی طراحی می‌کرد که از طریق آنها، بتواند بدفهمی‌های شایع را در کلاس، مطرح کند و دانشجویان را به بررسی دلایل بُروزشان، ترغیب نماید. او در مصاحبه توضیح داد که «من بدفهمی‌های بچه‌ها را طبق تحقیقات، درآوردم. اما حدس می‌زنم که دانشجوها هم توی این مناطق، مشکل دارن. وقتی اونها رو توی کلاس مطرح می‌کنم، متوجه می‌شم که بله! خیلی از مشکلاتی که توی کلاس‌های ابتدایی با دانش‌آموزان دارم، مشکلات دانشجوها هم هست.»

مریم اما به استناد یافته‌های پژوهشیِ به‌روز، آن بدفهمی‌ها را دسته‌بندی نموده و از آنها به‌طور غیرمستقیم استفاده می‌کرد و توضیح داد که «من به هیچ عنوان، مطالعات جدید را در کلاس مطرح نمی‌کنم. این کار را برای آگاهی خودم انجام می‌دم». وی از این شناخت، برای طراحی فعالیت‌ها و انتخاب ابزارهای آموزشی، کمک می‌گرفت تا دانشجویان با استفاده از دست‌ورزی‌های مختلف، با بدفهمی‌های دانش‌آموزان در رابطه با ضرب و تقسیم کسرها آشنا شوند و بدین ترتیب، بدفهمی‌های احتمالی خود را نیز شناخته و برطرف کنند. مریم و فاطمه ابزار کمک‌آموزشی را برای شناسایی بدفهمی‌ها و ایجاد درک درست این مبحث توسط دانشجویان، مفید دانستند.

- **دانش تجربی**

دانش نظری و تجربیِ برآمده از کلاس‌های درس ابتدایی، به هر دو شرکت‌کننده بینشی داده بود تا بتوانند بدفهمی‌های دانش‌آموزان را شناسایی کنند. فاطمه با استفاده از تدریس در دورهٔ ابتدایی، به‌طور غیرمستقیم این دانش را به‌دست آورده بود. در صورتی که مریم با برگزاری کارگاه‌هایی که برای معلمان برگزار می‌کرد و شنیدن تجربه‌های ایشان، درک غیرمستقیمی از کلاس درس پیدا کرده بود و به این دلیل به اندازه فاطمه،

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

در شناسایی بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان، مسلط نبود. به عنوان مثال، وقتی فاطمه از دانشجویان خواست تا معنای تقسیم را بگویند، با تجربه‌ای که از کلاس‌های ابتدایی داشت، می‌دانست دانش‌آموزان در استفاده از تعبیرهای تقسیم در جای مناسب، مشکل دارند و به این دلیل، حدس می‌زد که احتمالاً دانشجویان هم ممکن است دچار چنین بدفهمی‌ای باشند. به همین خاطر مثال‌هایی طراحی می‌کرد تا زمینه بروز بدفهمی‌ها را ایجاد کند و با بهانه قراردادنشان، راجع به آنها در کلاس بحث می‌کرد تا با مشارکت دانشجویان، آنها را شناسایی نموده و برطرف کند. علاوه بر این، گاهی فاطمه از پاسخ-های اشتباهی که دانش‌آموزانِ مدرسه در کاربرگ‌هایشان نوشته بودند و ریشه در بدفهمی‌های آنها داشت، برای تدریس به دانشجویان استفاده می‌کرد. روش او چنین بود که روی تابلو، پاسخ‌ها را در دو ستون می‌نوشت و از دانشجویان خواست که با بیان دلیل بگویند که پاسخ‌های کدام ستون، درست است. بعد به دانشجویان توصیه کرد که در تدریس خود، از این روش استفاده کنند تا بحث‌های مفیدی بین دانش‌آموزانِ کلاس ایجاد شود و آنان بتوانند با هدایت بحث‌ها، به رفع بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان کمک کنند.

بعضی اوقات، فاطمه بدفهمی‌های دانش‌آموزان را که در یافته‌های پژوهشی معرفی شده بودند، به‌صورت مستقیم با دانشجویان در میان می‌گذاشت و از آنها، برای بحث در مورد دلایل ممکنِ شکل‌گیری آن بدفهمی‌ها استفاده می‌کرد. مثلاً او گفت که دانش-آموزان پایهٔ پنجم، برای اولین‌بار در ضرب کسرها، با کوچک‌شدن حاصل‌ضرب مواجه می‌شوند که برای بسیاری از آنها، جای اما و اگر دارد. علت این تناقض این است که دانش‌آموزان تا قبل از آن، ضرب را عاملی برای بزرگ‌تر شدن حاصل فهمیده بودند. فاطمه بر این باور بود که برجسته‌نمودن تفاوت ضرب اعداد صحیح با اعداد کسری، پیش از آن‌که دانش‌آموزان دچار بدفهمی شوند، مفید است و توصیه‌اش این بود که می-توان در کلاس، از دانشجویان خواست که در مورد این‌که چرا در ضرب کسرها، حاصل به جای بزرگ‌تر شدن، کوچک می‌شود، بحث کرده و دلیل آن را پیدا کنند. فاطمه

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

نظرش این بود که معلمان دوره ابتدایی قبل از معرفی کسرها و انجام عملیات کسری، لزومی ندارد که به دانش‌آموزان تأکید کنند که «ضرب همیشه حاصل را بزرگ و تقسیم همیشه حاصل را کوچک می‌کند»، زیرا با معرفی کسرها، ممکن است دانش‌آموزان سردرگم شوند و برایشان بدفهمی ایجاد شود.

در مقابل، دانش تجربی مریم از منبع دیگری نشآت می‌گرفت. او در تدوین برنامه‌درسی و تهیهٔ سرفصل‌های درس مبانی آموزش ریاضیِ دوره کارشناسی آموزش ابتدایی، نقش ویژه‌ای داشت. به همین دلیل با معلمان و آموزشگران معلمان در کارگاه‌ها و جلسات آموزشی متعدد، تعامل داشت و در آنها متوجه شده بود که دانشجو–معلمان لازم دارند تا تقسیم و ضرب کسرها را به صورت یک کل بیاموزند، باور مریم این بود که پرداختن به جزئیات کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی، باید به عهده دانشجویان باشد. او در کلاسش سعی می‌کرد مفهوم کلی ضرب و تقسیم را برای دانشجویانش قابل درک‌تر کند، زیرا به تجربه دریافته بود که ریشهٔ اصلی بدفهمی‌های معلمان شاغل و معلمان آینده دوره ابتدایی، از دانش ناقص آنان در مورد مفهوم ضرب و تقسیم بود. مریم در آخرین مصاحبه ابراز نمود که «تقسیم برای دانشجوها سخته، اما به نظرم بازهم ضرب سخت‌تره از نظر مفهومی. چون دو تا عدد از یک جنس نیستند؛ یکی عملگره، یکی اندازه و تو تقسیم، دو تا اندازه هستن و اون چیزی که حاصل می‌شه، اون عملگره». مریم در کلاس از واژه بدفهمی استفاده نمی‌کرد، ولی ضعف‌های دانشیِ دانشجویان را به‌خاطر تجربه تدریس به آنها می‌شناخت و از آن به «سخت بودن» یاد می‌کرد. او منشا و دلیل بدفهمی‌های دانشجویان را می‌شناخت و از روش‌های گوناگون برای رفعشان، کمک می‌گرفت. به گفته مریم، دانشجویان «تو تقسیم خیلی مشکل دارن، من بر خلاف کتاب از حالت خاص شروع نمی‌کنم، چون من می‌گم حالت کلی‌تر را آدم باید بگه . . . به جای این‌که روش‌های مختلف بگیم، یه روش بگیم که درست کار کنه. . . منتها من با ابزار هم انجام می‌دم تا متوجه بشن مشکلشون کجاست. حالا هر روشی دلشون خواست، توی کلاسشون استفاده کنند.»

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

در مجموع، تجزیه‌وتحلیل داده‌ها نشان داد که فاطمه این فرصت ویژه را داشت که هم‌زمان با تدریس در دورهٔ ابتدایی، به دانشجو-معلمان آموزش ابتدایی، چگونگیِ تدریس ریاضی ابتدایی را آموزش دهد. این اتفاق، موقعیت منحصربه‌فردی برای وی به‌وجود آورده بود که پلی بین دو دنیای متفاوت از نظر مخاطبان کودک و بزرگ‌سال و دو دنیای مشابه از نظر محتوای آموزشی بزند و از هر دو، بهینه‌ترین استفاده را برای ارتقای کیفیت تدریس در هر دو، بهره ببرد. در حالی که مریم، از این فرصت محروم بود و بیشتر از طریق دانشِ نظری که در مورد بدفهمی‌های دانش‌آموزان کسب کرده بود، تدریس دانشگاهی خود را طراحی می‌کرد و دانشجویان ارتباط برقرار می‌کرد. در مجموع، فاطمه سازماندهی و انتخاب محتوا را وابسته به کتاب درسی ریاضی ابتدایی کرده بود و همین، برایش محدودیت‌هایی به‌وجود می‌آورد. در صورتی که مریم در تدریس ضرب کسرها، تنها مفهوم «عملگر» بودن ضرب را به‌کار برد. ولی هر دو آموزشگر، با هدف توسعه درک مفهومی ضرب کسرها، مثال‌ها و محتوای مناسب و تکمیلی را انتخاب می‌کردند.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف اصلی پژوهشی که انجام شد، شناسایی انواع دانش‌های مورد نیازِ آموزشگران معلمان ریاضی بود که مسئولیت‌شان، آماده‌کردن دانشجو-معلمان برای تدریس ریاضی در دوره ابتدایی است. نتایج این پژوهش نشان داد که آموزشگران ریاضی برای آماده-سازی معلمان آینده، لازم است با این پیش‌فرض وارد تدریس شوند که دانشجو-معلمان، با مباحثی که قرار است در کلاس آموزش داده شود؛ چه عمیق و مفهومی و چه رویّه‌ای و تنها با استفادهٔ درست یا ناقص از الگوریتم‌ها؛ از قبل آشنا هستند. با این پیش‌فرض، برای آموزشگران ضروری است که دانسته‌های قبلی دانشجویان را دست‌مایهٔ تدریس خود قرار دهند و از آن، به نفع ارتقای یادگیری ایشان، استفاده کنند. این شرایط، نیاز به تصمیم‌گیری در مورد سازماندهی سرفصل درس‌ها و انتخاب مثال‌ها و ابزار کمک‌آموزشی مناسب، ایجاب می‌کند.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

سپس به‌عنوان یک نمونه، این پژوهش نشان داد که دانستن راه‌های چگونگیِ ایجاد پیوند بین مفهوم ضرب و تقسیم و الگوریتمِ ضرب کسرها برای آموزشگرانِ معلمان و تدریس آن به دانشجویان، یک ضرورت است که یکی از الزامات آن، هم توجه به دانشِ پیشین دانش‌آموزان درباره ضرب و تقسیم با اعداد صحیح و هم بدفهمی‌های محتمل دانشجو-معلمان دورهٔ ابتدایی از این مبحث است. این دانش از این منظر مهم است که کودکان تا قبل از شناختن کسرها و انجام عملیات با آنها، یاد می‌گیرند که انجام عمل ضرب، باعث افزایش حاصل‌ضرب و انجام عمل تقسیم، باعث کاهش حاصل‌تقسیم می‌شود. در صورتی که در ضرب و تقسیم کسرها، برعکسِ این اتفاق، رخ می‌دهد و همین تفاوت، زمینهٔ ایجاد بدفهمی‌های زیادی را فراهم می‌کند. بدین سبب لازم است که آموزشگران، به معلمان آینده یاد بدهند که چگونه عملیات با اعداد صحیح را با عملیات با کسرها مقایسه کنند و دلایل تفاوت آنها را بفهمند تا دچار بیش‌تعمیمی[1] نشوند. آموزشگران برای این کار، می‌توانند از نمایش‌های گوناگون برای نشان‌دادن کسرها مانند مدل‌های مساحت، نسبت‌ها، عملگرها و همچنین، تفسیرهای مختلف برای ضرب از جمله جمع مکرر یک عدد با خود یا مدل‌های مساحتی و آرایه‌ای، استفاده کنند. بنابراین، به‌وجودآوردن چنین درکی در معلمان آینده، نیازمندی به انتخاب محتوای مناسب و پرچالش را برای تدریس، بیشتر نمایان می‌کند.

در این پژوهش، از ضرب و تقسیم کسرها به‌عنوان تمثیلی برای توصیف دانش‌های موردنیاز آموزشگران معلمان ریاضی که دانشجو-معلمان را برای تدریس ریاضی در دورهٔ ابتدایی آماده می‌کنند، استفاده شد که قابل تعمیم به سایر مباحث ریاضی این دوره است. همچنین معلوم شد که برای شناخت بدفهمی‌ها، می‌توان یافته‌های پژوهشی را با تجربهٔ عملی تلفیق نمود تا آموزشگران معلمان بتوانند در هر نوع تصمیم‌گیری و انتخاب در ارتباط با تدریس خود، از آنها بهره‌مند شوند.

[1] Overgeneralization

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

مؤلفه‌های چارچوب دانش‌های مورد نیازِ آموزشگران ریاضی

به کمک سه مقولهٔ برآمده از توصیف و تجزیه‌وتحلیل داده‌های این پژوهش در ارتباط با مبحث ضرب و تقسیم کسرها، چارچوبی برای دانش مورد نیاز آموزشگران ریاضی تدوین شد که مسئولیت آماده‌سازیِ معلمان آینده دوره ابتدایی را برای تدریس ریاضی به‌عهده دارند. یکی از مؤلفه‌های این چارچوب، دانش عمیق و وسیع ریاضیاتی است که آموزشگران ریاضی، مسئولیت آموزش تدریس آنها را دارند. همچنین، برای ارتقای یادگیری معلمان آینده، آموزشگران به دانش استفاده از بازنمایی‌های متعدد نمایش هر مفهوم ریاضی و نحوهٔ ارتباط آنها با یکدیگر از یک‌سو و ارتباط آنها با الگوریتم‌های مبتنی بر آن مفاهیم از سویی دیگر نیاز دارند. این دانش، تلفیقی از دانش محتوایی و دانش موضوعی است که مؤلفه «دانش محتوایی–موضوعی ریاضی» را تشکیل می‌دهد.

علاوه بر این، آموزشگران معلمان ریاضی به دانشی نیاز دارند تا بتوانند به معلمان آینده کمک کنند که نحوهٔ بازنگریِ محتوای ریاضی و تصمیم‌گیری راجع به تقدم و تأخر آنها را متناسب با موقعیت کلاس درس واقعی، بیاموزند. این دانش، ترکیبی از دانش موضوعی ریاضی و دانش پداگوژی ریاضی با دانش برنامه درسی ریاضی است که با هم، مؤلفه «دانش برنامه درسی ریاضی» را تبیین می‌کنند.

افزون بر اینها، معرفی ریشه‌های بدفهمی‌های احتمالیِ دانش‌آموزان به دانشجو–معلمان، فرصتی برای بُروز بالقوهٔ بدفهمی‌های مشابهِ معلمان آینده ایجاد می‌کند که اهمیت ویژه‌ای در آموزش آنان دارد. زیرا دانشجویان یا نسبت به بدفهمی‌ها و مشکلات یادگیری مفاهیم بنیادی ریاضی خود آگاه نیستند یا نسبت به ابراز آن واهمه دارند. درصورتی که وقتی آموزشگران آنها را در کلاس مطرح می‌کنند، فرصت مغتنمی به‌وجود می‌آید تا بدون احساس سرشکستگی، ریشهٔ آن مشکلات و بدفهمی‌ها را بشناسند و برای رفعشان، از مثال‌ها و بازنمایی‌ها، به‌جا و به‌موقع استفاده نمایند. این توانایی، دانش ویژه‌ای را می‌طلبد که مؤلفه «دانش بدفهمی‌های ریاضی» نامیده می‌شود.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

تواناییِ انتخاب مثال‌های مناسب برای درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی و طراحی فعالیت‌های مناسب یادگیری، دانش دیگری است که برای آموزشگران ریاضی لازم است. این دانش، طراحیِ تدریس ریاضی را برای معلمان آینده تسهیل می‌کند و در آنها، مهارت جرح‌وتعدیل تدریس خود را متناسب با موقعیت کلاس درس و دانش‌آموزان که مخاطبان اصلی‌شان هستند، ایجاد می‌کند. این مهارت‌ها، مؤلفه «دانش متناسب‌سازی تدریس ریاضی با موقعیت» می‌سازد.

این توانایی‌ها به آموزشگران ریاضی کمک می‌کند تا معلمان آینده به گونه‌ای آموزش ببینند که بتوانند در کلاس درس واقعی، دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای ریاضی و ارتباط بین آن دو را به دانش‌آموزان ابتدایی بیاموزند. در مجموع این چهار مؤلفه، پایه‌های دانشی را برای آموزشگران می‌گذارد که مشابه دانشی است که در ادبیات حوزهٔ آموزش معلمان ریاضی، از آن به‌عنوان «دانش پداگوژیکی محتوا[1]» نام برده می‌شود. این دانش، همان گمشده‌ای است که بِگِل (۱۹۸۱) به دنبال آن بود و شولمن (۱۹۸۵) توانست آن را صورت‌بندی کند، ولی نمی‌دانست آن را چگونه تبیین نماید، اگرچه دغدغه‌های این دو متفکر ریاضی/آموزش ریاضی و آموزش معلمان، راه را برای انجام پژوهش‌های متعددی در حوزهٔ آموزش معلمان ریاضی هموار کرد. پژوهش حاضر، به گمشدهٔ دیگری پرداخت که «دانش مورد نیازِ آموزشگران ریاضی برای آماده‌سازی معلمان آینده دورهٔ ابتدایی» بود و در پژوهش‌های حوزه آموزش معلمان ریاضی، هنوز نیازمند استنادات پژوهشیِ بیشتری است. نوآوری این پژوهش از این جهت است که

[1] در اغلب منابع پژوهشی و حتی اسناد تولیدشده در ایران، به‌جای انتخاب معادل مناسبی برای «دانش پداگوژیکی محتوا»، بی مهابا از سرواژه‌های انگلیسی آن یعنی PCK در متن فارسی استفاده شده‌است. در صورتی که «پداگوژی» که یک واژه یونانی تشکیل‌شده از «کودک» و «رهبری» است، طی زمان گسترده شده و در فرهنگ‌نامه‌های معروف انگلیسی و فارسی، به معنای تعلیم‌وتربیت، علم تدریس، حرفه معلمی و حتی دوره‌های آموزشی آمده است. به نظر می‌رسد. که این تنوع، استفاده از «پداگوژی» را در زبان‌های مختلف، موجه می‌کند. در برنامهٔ درسی بازنگری‌شده دوره‌های کارشناسی آموزش ریاضی، نام «دانش موضوعی-تربیتی» بر آن نهاده شده‌است.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

مرزهای دانش را در رابطه با آموزشِ آموزشگران ریاضی، اندکی به جلو رانده و توانسته انواع دانش‌های مورد نیاز آنان را تبیین نماید. حاصل این پژوهش، تدوین چارچوبی با چهار مؤلفه «دانش محتوایی-موضوعی ریاضی»، «دانش برنامه درسی ریاضی»، «دانش بدفهمی‌های ریاضی» و «دانش متناسب‌سازی تدریس ریاضی با موقعیت» برای «دانش-های مورد نیاز آموزشگران ریاضی جهت آماده‌سازی معلمان ابتدایی آینده برای تدریس ریاضی» است که قابلیت تبدیل‌شدن به یک نظریهٔ منسجم را در حوزهٔ با اهمیت و پر کاربرد آموزش معلمان ریاضی و پیش‌بردن مرزهای دانش در آن را دارد.

سپاس‌گزاری

بر خود لازم می‌دانیم که تشکر صمیمانه خود را تقدیمِ دو آموزشگر و استاد آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان کنیم که برای انجام این پژوهش، سخاوت‌مندانه وقتشان را در اختیارمان گذاشتند و اجازه حضور را در کلاس-های خود، به نویسنده اول دادند. افزون براین، این دو استاد عزیز، طی فرایند جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها، همیشه پاسخگوی پرسش‌های تکمیلی بودند و برای اطمینان از برداشت‌ها و تفسیرهایی که از نظرات و تدریس‌شان داشتیم، آنها را می‌خواندند و اصلاح می‌کردند. از خداوند منان، توفیق روزافزونشان را در فعالیت‌های حرفه‌ای و خدمت به توسعه حرفه‌ای معلمان و آموزشگران ریاضی، خواستاریم.

منابع

کانلی، اِف. اِم و بِن‌پِرتز، اِم. (۱۹۸۱). معلم، تحقیق و توسعهٔ برنامهٔ درسی. ترجمهٔ زهرا گویا (۱۳۸۱). در «برنامهٔ درسی: نظرگاه‌ها، دیدگاه‌ها و چشم‌اندازها»، محمود مهرمحمدی، چاپ اول (۱۳۸۱). آستان قدس رضوی، مشهد.

Abell, S. K.; Rogers, M. A. P.; Hanuscin, D. L.; Lee, M. H. & Gagnon, M. J. (2009). Preparing the next generation of science teacher educators: A model for developing PCK for teaching science teachers. *Journal of Science Teacher Education*, 20(1), 77-93.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

Adler, J. & Pillay, V. (2007). An investigation into mathematics for teaching: Insights from a case. *African Journal of Research in Mathematics, Science, and Technology Education*, 87-108.

Askey, R. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics. *American Educator*, 23(3), 6-9; 12-13, 49.

Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching: Explicating and examining a program of research. *Presentation made at the annual meeting of the American Educational Research Association*; New York.

Ball, D. L. & Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian mathematics education study group*.

Ball, D. L.; Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 14-17, 20-22, 43-46.

Begle, E. G. (1979). Critical variables in mathematics education. *Mathematical Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics*.

Carr, W., & Kemmis, S. (1986). *Becoming Critical: Education, Knowledge, and Action Research*. London: Falmer.

Chapman, O. (2008). Mathematics teacher educators 'learning from research on their instructional practices: A cognitive perspective. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.); *The mathematics teacher educator as a developing professional;* (Vol. 4, pp. 93-114). (The International Handbook of Mathematics Teacher Education). Sence Publisher.

Chapman, O. (2021). Mathematics teacher educator knowledge for teaching teachers. In M. Goos & K. Beswick. (Eds.); *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspective and Challenges*; pp. 403-416. (Research in Mathematics Education. Series Editors: J. Cai & J. A. Middleton). Springer.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2012). *The mathematical education of teachers*.

Corbin, J. & Strauss, A. (1990). Grounded Theory Research: Procedures, Canons, and Evaluative Criteria. *Qualitative Socialogy*; Vol. 13, No. 1.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

Donmoyer, R. (1996). The concept of a knowledge base. In F. B. Murray (Ed.); *Teacher educator's handbook: Building a knowledge base for the preparation of teachers* (1st ed.); pp. 92-119.

Glaser, B. & Strauss, A. (1967). The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research. Mill Valley, CA: Sociology Press.

Hill, H. C.; Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.

Howe, R. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Review by Roger Howe. *Notices of the American Mathematical Society*, 46(8), 881-887.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.); *The mathematics teacher educator as a developing professional;* (Vol. 4, pp. 335-361). (The International Handbook of Mathematics Teacher Education). Sence Publisher.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London: The Falmer Press.

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 8-14.

Kazima, M.; Pillay, V. & Adler, J. (2008). Mathematics for teaching: Observations from two case studies. *South African Journal of Education*, 28, 283-299.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Perks, P., & Prestage, S. (2008). Tools for learning about teaching and learning. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.); *The mathematics teacher educator as a developing professional.* Vol. 4, pp. 265-280). (*The International Handbook of Mathematics Teacher Education).* Sense Publishers.

Rider, R. L. & Lynch-Davis, K. (2006). Continuing the conversation on mathematics teacher educators. In K. Lynch-Davis & R. L. Rider. (Eds.); *The work of mathematics teacher educators:*

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]

Continuing the conversation, pp.1-7. *Association of Mathematics Teacher Educators Monograph*, Volume 3.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: A conception of teacher knowledge. *American Educator*, 10(1), 9-15, 43-44.

Smith, K. (2003). So, what about the professional development of teacher educators? *European Journal of Teacher Education*, 26(2), 201-215.

Strauss, A., & Corbin, J. M. (1990). ***Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques.*** Sage Publications, Inc.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.); *The mathematics teacher educator as a developing professionals* (pp. 93-114; Volume 4, The International Handbook of Mathematics Teacher Education.

Zaslavsky, O. & Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: Growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(1), 5-32.

Zopf, D. (2010). Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education. *Unpublished doctoral dissertation.* The University of Michigan.

[Downloaded from system.khu.ac.ir on 2026-11-07]