نشریه علوم دانشگاه خوارزمی
جلد ۱۲، شماره ۱
تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۱

روش هم‌محلی چندجمله‌ای‌های لژاندر برای تقریب جواب معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی با تأخیر زمانی

یداله اردوخانی، میترا جزمحتشمی:
دانشگاه الزهرا، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

چکیده

هدف اصلی این مقاله حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی با تأخیر زمانی از مراتب بالاست. روش مبتنی بر بسط لژاندر با استفاده از نقاط هم محلی گاوس- لژاندر است. در این روش سری لژاندر قطع شده جواب معادله را در نظر گرفته و معادلهٔ انتگرال- دیفرانسیل خطی و شرایط داده شده را به یک معادلهٔ ماتریسی تبدیل می کنیم، سپس با استفاده از نقاط هم محلی گاوس- لژاندر، معادلهٔ ماتریسی تبدیل به یک دستگاه از معادلات جبری خطی با ضرایب مجهول بسط لژاندر می‌شود که از حل دستگاه، ضرایب بسط لژاندر تابع جواب به‌دست می‌آید. در آخر کارایی روش را با مثال‌هایی تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

مقدمه

معادلات انتگرال- دیفرانسیل ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ میلادی توسط ولترا[۱] معرفی شد [۱]-[۳]. این معادلات در علومی چون فیزیک، مکانیک، ارتباطات، پتروشیمی، اقتصاد، ساختمان و پل سازی، اشعه لیزر، نیروگاه‌های هسته‌ای و رآکتورها کاربردهای فراوان دارند [۴]-[۶] . تا کنون روش های متفاوتی برای حل آن‌ها ارائه شده است. پچپت[۲] [۷] معادلات انتگرال فردهلم- ولترای آمیخته را بررسی کرد، کوتن[۳] [۸] روش هم‌محلی را برای حل معادلات انتگرال فردهلم- ولترا و برونر[۴] [۹] روش هم‌محلی را برای معادلات انتگرال فردهلم- ولترا غیرخطی به‌کار برده‌اند و در [۱۰] روش والش[۵] برای حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل همرشتاین فردهلم تجزیه و تحلیل شده است، ضمناً ایاد[۶] با استفاده از روش‌های هم‌محلی و توابع اسپلاین [۱۱]، یالسینباس[۷] به‌کمک چندجمله‌ای‌های تیلور [۱۲]، و بهیری[۸] به‌کمک موجک دابیشز به‌همراه روش‌های هم‌محلی و گالرکین

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال-دیفرانسیل فرد هلم، تأخیر زمانی، نقاط هم‌محلی گاوس لژندار، بسط لژندار
دریافت ۸۹/۹/۳ پذیرش۹۱/۱۰/۳

*نویسنده مسئول ordokhani@alzahra.ac.ir

۱. Volterra ۲. Pachpatte ۳. Kauthen ۴. Brunner ۵. Walsh
۶. Ayad ۷. Yalcinbas ۸. Behiry

[۱۳]، به حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل پرداختند. همچنین روش اسپلاین [۱۴]، روش شبه‌متعامد موجک اسپلاین [۱۵]، روش رونگه- کوتا [۱۶]، روش هار گویا شده [۱۷]، روش تیلور [۱۸]، [۱۸]، روش چبیشف [۲۰] و روش لژاندر [۲۱] برای حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل با تأخیر زمانی به‌کار رفته است. محور کار در این مقاله حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی با تأخیر زمانی با استفاده از روش هم‌محلی لژاندر است. در این مقاله، با استفاده از روش هم‌محلی لژاندر، چندجمله‌ای‌های لژاندر را برای تقریب جواب معادلهٔ انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی با تأخیر زمانی،

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{n} P_r^*(x) y^{(r)}(x-\tau) = f(x) + \int_a^b K(x,t) y(t-\tau)\, dt, \quad \tau \ge 0, \ a \le x \le b, \qquad (۱)$$

با شرایط آمیخته زیر و با فرض داشتن جواب یکتا به‌کار می بریم،

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik}\ y^{(k)}(a) + b_{ik}\ y^{(k)}(b) + c_{ik}\ y^{(k)}(c)] = \mu_i, \qquad i = 0,1,\dots,m-1, \quad a \le c \le b, \qquad (۲)$$

که در آن ضرایب a_{ik} ، b_{ik} ، c_{ik} و μ_i ها ثابت های حقیقی معلوم بوده و $P_k(x)$ ، $P_r^*(x)$ ، $K(x,t)$ و $f(x)$ نیز توابع معلوم هستند.

روابط ماتریسی

چند جمله‌ای‌های لژاندر روی بازهٔ $[-1,1]$ بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$l_0(z) = 1,$$
$$l_1(z) = z,$$
$$l_{j+1}(z) = \frac{2j+1}{j+1} z\, l_j(z) - \frac{j}{j+1} l_{j-1}(z), \qquad j = 1, 2, \dots . \qquad (۳)$$

که نسبت به تابع وزن $w(z)=1$ متعامدند و یک پایهٔ متعامد کامل برای $L^2[-1,1]$ است [۲۲]. اگر این چندجمله‌ای‌ها را روی بازهٔ بستهٔ [a , b] در نظر بگیریم، به آن چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته گوییم که در این رابطهٔ بازگشتی صدق می کند:

$$L_0(x) = 1,$$
$$L_1(x) = \frac{2x - a - b}{b - a},$$
$$L_{j+1}(x) = \frac{(2j+1)(2x-a-b)}{(j+1)(b-a)} L_j(x) - \frac{j}{j+1} L_{j-1}(x), \qquad j = 1, 2, \dots . \qquad (۴)$$

معادلهٔ (۱) را بدین شکل در نظر می گیریم:

$$E(x) + R(x) = f(x) + I(x), \qquad (۵)$$

که در آن

$$E(x) = \sum_{k=0}^{m} P_k(x) y^{(k)}(x), \quad R(x) = \sum_{r=0}^{n} P_r^*(x) y^{(r)}(x-\tau), \quad I(x) = \int_a^b K(x,t) y(t-\tau)\, dt.$$

فرض کنیم $y(x)$ قابل بسط بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته باشد، پس

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L_j(x), \qquad (۶)$$

که در آن ضرایب لژاندر انتقال یافته یعنی a_j ها بدین‌صورت به‌دست می‌آیند:

$$a_j = \frac{2j+1}{b-a}\int_a^b y(x)L_j(x)\,dx, \quad j = 0,1,\dots .$$

اگر در (۶)، $y(x)$ را با (N+1) جملهٔ اول تقریب بزنیم، خواهیم داشت،

$$y(x) \simeq \sum_{j=0}^{N} a_j L_j(x) = L^T(x)A, \tag{۷}$$

به‌طوری‌که:

$$L(x) = \left[L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)\right]^T, \quad A = \left[a_0, a_1, \dots, a_N\right]^T .$$

همچنین بردار مشتق $L(x)$ بدین‌صورت بیان می‌شود [۲۲]:

$$L'(x) = D\,L(x), \tag{۸}$$

که برای Nهای زوج،

$$D = \frac{2}{b-a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 9 & \cdots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 & \cdots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix},$$

و برای Nهای فرد،

$$D = \frac{2}{b-a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 & \cdots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 9 & \cdots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

در ماتریس D^i هر چه i بزرگ‌تر باشد، ماتریس خلوت‌تر است و داریم: $D^{N+1} = 0$.
با استفاده از معادله‌های (۷) و (۸) خواهیم داشت:

$$y^{(k)}(x) \simeq \left(\frac{d^k L^T(x)}{dx^k}\right)A = L^T(x)(D^T)^K A, \quad k = 0,1,\dots,m. \tag{۹}$$

با جای‌گذاری $(x-\tau)$ به جای x در (۴) نتیجه می‌شود [۲۱]:

$$L_j(x-\tau) = \sum_{k=0}^{j} h_{jk} L_k(x), \quad x > \tau,\ j = 0,1,\dots,N, \tag{۱۰}$$

که در آن:

$$h_{0,0} = 1,\ h_{1,0} = \frac{-2\tau}{b-a},\ h_{j,j} = 1, \quad j = 1,\dots,N, \tag{۱۱}$$

$$h_{j+1,0}=\frac{2j+1}{3(j+1)}h_{j,1}-\frac{2j+1}{j+1}(\frac{2\tau}{b-a})h_{j,0}-\frac{j}{j+1}h_{j-1,0},\quad j=1,2,\ldots\quad, \tag{۱۲}$$

$$h_{j+1,k}=\frac{2j+1}{j+1}\{\frac{k+1}{2k+3}h_{j,k+1}+\frac{k}{2k-1}h_{j,k-1}-\frac{2\tau}{b-a}h_{j,k}\}-\frac{j}{j+1}h_{j-1,k},\ k=1,2,\ldots,j-1, \tag{۱۳}$$

$$h_{j+1,j}=\frac{2j+1}{j+1}\{\frac{j}{2j-1}h_{j,j-1}-\frac{2\tau}{b-a}\}, \tag{۱۴}$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$L(x-\tau)=H\,L(x), \tag{۱۵}$$

که H ماتریس پایین مثلثی زیر است:

$$H=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\h_{1,0}&1&0&\cdots&0&0\\h_{2,0}&h_{2,1}&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\h_{m,0}&h_{m,1}&h_{m,2}&\cdots&h_{m,m-1}&1\end{bmatrix}. \tag{۱۶}$$

همچنین با به‌کارگیری روابط (۷)، (۸) و (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$y^{(r)}(x-\tau)\simeq(\frac{d^rL^T(x-\tau)}{dx^r})A=(\frac{d^rL^T(x)}{dx^r})H^TA=L^T(x)(D^T)^rH^TA,\quad r=0,1,\ldots,n. \tag{۱۷}$$

برای به‌دست آوردن جواب معادلهٔ (۱) به‌همراه شرایط آمیخته (۲)، از نقاط هم محلی گاوس- لژاندر در معادلهٔ (۵) استفاده می‌کنیم. بنا بر این داریم:

$$E(x_i)+R(x_i)=f(x_i)+I(x_i),\quad i=0,1,\ldots,N. \tag{۱۸}$$

لذا شکل ماتریسی معادلهٔ (۱۸) بدین‌صورت است:

$$E+R=F+I, \tag{۱۹}$$

که در آن:

$$E=\begin{bmatrix}E(x_0)\\E(x_1)\\\vdots\\E(x_N)\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}R(x_0)\\R(x_1)\\\vdots\\R(x_N)\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}f(x_0)\\f(x_1)\\\vdots\\f(x_N)\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}I(x_0)\\I(x_1)\\\vdots\\I(x_N)\end{bmatrix}.$$

در نتیجه شکل ماتریسی E توسط نقاط هم‌محلی، بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$E=\sum_{k=0}^{m}P_kY^{(k)}, \tag{۲۰}$$

که در آن:

$$P_k=\begin{bmatrix}P_k(x_0)&0&\cdots&0\\0&P_k(x_1)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&P_k(x_N)\end{bmatrix},\quad Y^{(k)}=\begin{bmatrix}y^{(k)}(x_0)\\y^{(k)}(x_1)\\\vdots\\y^{(k)}(x_N)\end{bmatrix}.$$

با جای‌گذاری نقاط هم‌محلی در معادلهٔ (۹)، این رابطه نتیجه می‌شود:

$$Y^{(k)}=\begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0)\\ y^{(k)}(x_1)\\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N)\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} L^T(x_0)\\ L^T(x_1)\\ \vdots \\ L^T(x_N)\end{bmatrix}(D^T)^k A=L(D^T)^k A, \qquad (۲۱)$$

که

$$L=\begin{bmatrix} L_0(x_0) & L_1(x_0) & \cdots & L_N(x_0)\\ L_0(x_1) & L_1(x_1) & \cdots & L_N(x_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(x_N) & L_1(x_N) & \cdots & L_N(x_N)\end{bmatrix}.$$

لذا از معادلات (۲۰) و (۲۱) داریم:

$$E\simeq\sum_{k=0}^{m} P_k L(D^T)^k A. \qquad (۲۲)$$

هم چنین ماتریس نمایش R، را مشابه رابطهٔ (۲۲) و با استفاده از رابطهٔ (۱۷) می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$R\simeq\sum_{r=0}^{n} P_r^* L(D^T)^r H^T A. \qquad (۲۳)$$

که در آن:

$$P_r^*=\begin{bmatrix} P_r^*(x_0) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & P_r^*(x_1) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_r^*(x_N)\end{bmatrix}.$$

اکنون هسته $K(x,t)$ از بخش انتگرالی معادلهٔ (۱) را در نظر می‌گیریم. تقریب آن با استفاده از بسط چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته از مرتبه N بدین‌صورت نوشته می‌شود:

$$K(x,t)\simeq\sum_{r=0}^{N} k_r(x)L_r(t), \qquad (۲۴)$$

$k_r(x)$ ها ضرایب لژاندر هستند و

$$k_r(x)=\frac{2r+1}{b-a}\int_a^b K(x,t)L_r(t)\,dt,\ r=0,1,\dots,N.$$

بنا بر این ماتریس نمایش $K(x,t)$ بدین‌صورت است:

$$K(x,t)\simeq k^T(x)L(t), \qquad (۲۵)$$

که در آن:

$$K(x)=\left[k_0(x),k_1(x),\dots,k_N(x)\right]^T.$$

حال برای بخش انتگرالی معادله (۱)، با به‌کارگیری روابط (۷)، (۱۵) و (۲۵) داریم:

$$I(x)=\int_a^b K(x,t)\,y(t-\tau)dt=\int_a^b k^T(x)L(t)L^T(t)H^T A\,dt=k^T(x)Z\,H^T A. \tag{۲۶}$$

که در آن Z با استفاده از خاصیت تعامدی چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته بدین‌صورت است:

$$Z=\int_a^b L(t)L^T(t)dt=(b-a)\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{3}&0&\cdots&0\\0&0&\frac{1}{5}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\frac{1}{2N+1}\end{bmatrix}. \tag{۲۷}$$

بنا بر این با جای‌گذاری نقاط هم‌محلی، رابطهٔ (۲۶) بدین‌صورت تبدیل می‌شود:

$$I(x_i)\simeq k^T(x_i)Z\,H^T A, \tag{۲۸}$$

بنا بر این خواهیم داشت:

$$I\simeq K\,Z\,H^T A, \tag{۲۹}$$

که در آن:

$$K=\begin{bmatrix}k_0(x_0)&k_1(x_0)&\cdots&k_N(x_0)\\k_0(x_1)&k_1(x_1)&\cdots&k_N(x_1)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k_0(x_N)&k_1(x_N)&\cdots&k_N(x_N)\end{bmatrix}.$$

روش حل و دقت جواب

با جای‌گذاری روابط ماتریسی (۲۲)، (۲۳) و(۲۹) در معادلهٔ (۱)، این معادلهٔ ماتریسی را خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{k=0}^{m}P_k L\,(D^T)^k+\sum_{r=0}^{n}P_r^{*}L\,(D^T)^r H^T-KZH^T\right)A=F. \tag{۳۰}$$

معادلهٔ (۳۰) را به این شکل خلاصه‌نویسی می‌کنیم:

$$WA=F, \tag{۳۱}$$

دستگاه (۳۱)، یک دستگاه (N+1) معادله با (N+1) مجهول ضرایب لژاندر است که در آن:

$$W=[w_{ij}]=\sum_{k=0}^{m}P_k L(D^T)^k+\sum_{r=0}^{n}P_r^{*}L(D^T)^r H^T-KZH^T. \tag{۳۲}$$

با جای‌گذاری رابطهٔ ماتریسی (۹) در شرایط آمیخته (۲) داریم،

$$\sum_{k=0}^{m-1}[a_{ik}L^T(a)+b_{ik}L^T(b)+c_{ik}L^T(c)](D^T)^k A=\mu_i,\quad i=0,1,\dots,m-1. \tag{۳۳}$$

لذا با قرار دادن:

$$U=\sum_{k=0}^{m-1}[a_{ik}L^T(a)+b_{ik}L^T(b)+c_{ik}L^T(c)](D^T)^k, \tag{۳٤}$$

با استفاده از معادلهٔ (۳٤) خواهیم داشت:

$$UA = \mu, \tag{۳۵}$$

که در آن:

$$\mu = [\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}]^T. \tag{۳٦}$$

اکنون برای به‌دست آوردن جواب معادلهٔ (۱) تحت شرایط آمیخته (۲)، m معادلهٔ (۳۵) را با m معادلهٔ آخر (۳۱) جای‌گزین می‌کنیم، سپس با استفاده از نرم‌افزار Mathematica نسخه ۵.۱ و حل دستگاه خطی، ضرایب مجهول لژاندر انتقال یافته به‌دست می‌آیند و با جای‌گذاری آن در رابطهٔ (۷) تقریب جواب $y(x)$ به‌دست می‌آید. چون فرض شده است که معادلهٔ (۱) به‌همراه شرایط آمیخته (۲) جواب یکتا دارد، بنا بر این دستگاه خطی حاصل جواب یکتا دارد.

از آن‌جا که چندجمله‌ای لژاندر (۷) یک جواب تقریبی برای معادلهٔ (۱) است، وقتی که جواب $y(x)$ و مشتقات آن جای‌گزین می‌شوند، آن‌گاه برای هر $x_i \in [a,b]$ که $i = 0,1,\ldots,N$ قرار می‌دهیم:

$$D(x_i) = \left| \sum_{k=0}^{m} P_k(x_i)\, y^{(k)}(x_i) + \sum_{r=0}^{n} P_r^*(x_i)\, y^{(r)}(x_i - \tau) - \int_a^b K(x_i,t)\, y(t-\tau)\, dt - f(x_i) \right| \cong 0,$$

یا

$$D(x_i) \le 10^{-s_i},$$

که در آن s_i عدد صحیح مثبت است.

حال اگر $\max\left|10^{-s_i}\right| = 10^{-s}$ (که s هر عدد صحیح مثبت است) فرض شود، آن‌گاه N تا زمانی که $\left|D(x_i)\right|$ در هر نقطه کوچک‌تر از 10^{-s} شود افزایش می‌یابد. بنا بر این می‌توان s را (10^{-s}) به‌گونه‌ای انتخاب کرد تا به‌دقت مورد نظر برسیم. همچنین تابع خطا بدین‌صورت است:

$$D(x) = \left| \sum_{k=0}^{m} P_k(x)\, y_N{}^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{n} P_r^*(x)\, y_N{}^{(r)}(x-\tau) - \int_a^b K(x,t)\, y_N(t-\tau)\, dt - f(x) \right|,$$

که در آن:

$$y_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j L_j(x).$$

قضیه: هرگاه $H^k[a,b]$ فضای سوبولف باشد و $y(t) \in H^k[a,b]$ آن‌گاه:

$$\left\| y(t) - \sum_{j=0}^{N} a_j L_j(x) \right\|_{L^2[a,b]} \le c_0 N^{-k} \left\| y(t) \right\|_{H^k[a,b]},$$

که در آن c_0 مثبت است و به $y(t)$ و N بستگی ندارد [۲۳].

ارزیابی روش با مثال‌های عددی

مثال ۱. معادلهٔ انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبهٔ اول:

$$y'(x)-y(x)+xy'(x-1)+y(x-1)=x-2+\int_{-1}^{1}(x+t)\,y(t-1)dt,\ \ -1\le x\le 1$$

با شرط آمیخته،

$$y(-1)-2y(0)+y(1)=0.$$

را در نظر می‌گیریم [۱۹]. در این مثال داریم:

$$P_0(x)=-1, P_1(x)=1, P_0^*(x)=1, P_1^*(x)=x, f(x)=x-2, K(x,t)=x+t, \tau=1.$$

با اعمال روش بخش ۳ و برای N= ۲ ضرایب لژاندر را بدین‌صورت به‌دست می‌آوریم:

$$a_0=4,\ a_1=3,\ a_2=0.$$

با جای‌گذاری این ضرایب در معادلهٔ (۷)، جواب $y(x)=3x+4$ به‌دست می‌آید، که جواب واقعی است.

مثال ۲. معادله انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبهٔ دوم با این شرایط اولیه را در نظر می‌گیریم [۱۹]:

$$y''(x)+xy'(x)+xy(x)+y'(x-1)+y(x-1)=e^{-x}+e+\int_{-1}^{0}t\,y(t-1)dt,$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=-1.$$

در این مثال جواب واقعی $y(x)=e^{-x}$ است. با اعمال روش بخش (۳)، برای N= ۷ جواب به‌دست آمده با نتایج موجود در [۱۹] در جدول ۱ مقایسه شده‌اند.

جدول ۱. نتایج عددی مثال ۲

X	جواب دقیق	روش تیلور [۱۹] با N= ۷	روش ارائه شده با N= ۷
-۱/۰	۲/۷۱۸۲۸۱	۲/۷۲۶۱	۲/۷۱۸۲۸۵
-۰/۹	۲/۴۵۹۶۰۳	۲/۴۶۴۷	۲/۴۵۹۶۰۶
-۰/۸	۲/۲۲۵۵۴۱	۲/۲۲۸۶	۲/۲۲۵۵۴۳
-۰/۷	۲/۰۱۳۷۵۳	۲/۰۱۵۴	۲/۰۱۳۷۵۴
-۰/۶	۱/۸۲۲۱۱۹	۱/۸۲۲۹	۱/۸۲۲۱۱۹
-۰/۵	۱/۶۴۸۷۲۱	۱/۶۴۸۸	۱/۶۴۸۷۲۲
-۰/۴	۱/۴۹۱۸۲۵	۱/۴۹۱۸	۱/۴۹۱۸۲۵
-۰/۳	۱/۳۴۹۸۵۹	۱/۳۴۹۸	۱/۳۴۹۸۵۹
-۰/۲	۱/۲۲۱۴۰۳	۱/۲۲۱۳	۱/۲۲۱۴۰۳
-۰/۱	۱/۱۰۵۱۷۱	۱/۱۰۵۲	۱/۱۰۵۱۷۱
0/0	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰

مثال ۳. معادلهٔ انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبهٔ سوم با شرایط اولیه

$$y'''(x)-x\,y'(x)+y''(x-1)-x\,y(x-1)=-(x+1)[\sin(x-1)+\cos(x)]-\cos 2+1+\int_{-1}^{1}y(t-1)dt,$$

$$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0.$$

را در نظر می‌گیریم [۱۹]، این مثال دارای جواب واقعی $y(x)=\sin(x)$ است. برای N=۷، با استفاده از روش بخش ۳، نتایج به‌دست آمده با نتایج موجود در [۱۹]، در جدول ۲ مقایسه شده‌اند. همچنین نتایج برای N=۱۰ نیز در این جدول مشاهده می‌شود.

جدول ۲. نتایج عددی مثال ۳

X	جواب دقیق	روش تیلور [۱۹] با ۷ =N	روش ارائه شده با ۷ =N	روش ارائه شده با ۱۰ =N
-۱/۰	-۰/۸۴۱۴۷۱	-۰/۹۰۱۸۳۲	-۰/۸۴۱۵۱۳	-۰/۸۴۱۴۷۱
-۰/۸	-۰/۷۱۷۳۵۶	-۰/۷۴۰۱۸۷	-۰/۷۱۷۳۷۰	-۰/۷۱۷۳۵۶
-۰/۶	-۰/۵۶۴۶۴۲	-۰/۵۷۱۲۷۸	-۰/۵۶۴۶۴۶	-۰/۵۶۴۶۴۲
-۰/۴	-۰/۳۸۹۴۱۸	-۰/۳۹۰۶۱۹	-۰/۳۸۹۴۱۹	-۰/۳۸۹۴۱۸
-۰/۲	-۰/۱۹۸۶۶۹	-۰/۱۹۸۷۳۸	-۰/۱۹۸۶۶۹	-۰/۱۹۸۶۶۹
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
۰/۲	۰/۱۹۸۶۶۹	۰/۱۹۸۶۱۶	۰/۱۹۸۶۶۹	۰/۱۹۸۶۶۹
۰/۴	۰/۳۸۹۴۱۹	۰/۳۸۸۶۰۹	۰/۳۸۹۴۱۷	۰/۳۸۹۴۱۹
۰/۶	۰/۵۶۴۶۴۲	۰/۵۶۰۸۲۲	۰/۵۶۴۶۳۸	۰/۵۶۴۶۴۲
۰/۸	۰/۷۱۷۳۵۹	۰/۷۰۵۸۷۷	۰/۷۱۷۳۴۳	۰/۷۱۷۳۵۶
۱/۰	۰/۸۴۱۴۷۱	۰/۸۱۴۰۹۸	۰/۸۴۱۴۳۹	۰/۸۴۱۴۷۳

مثال ٤. معادلهٔ انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبهٔ دوم با این شرایط اولیه را در نظر می‌گیریم [۲۲]:

$$y^{''}(x)+x\,y^{'}(x)-xy(x)=e^{x}-2\sin(x)+\int_{-1}^{1}\sin(x)\,e^{-t}\,y(t)\,d\,t,\qquad y(0)=1,\,y^{'}(0)=1.$$

که جواب واقعی آن $y(x)=e^{x}$ است. برای N=۹ خطای جواب تقریبی، با خطای نتایج موجود در مرجع [۲۲] در جدول ۳ با هم مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است که خطا در نقطهٔ $x=0$ برابر با صفر است.

جدول ۳. خطای مثال ٤

x	-۱/۰	-۰/۸	-۰/٦	-۰/٤	-۰/۲
روش [۲۲] با ۹ =N	۰/۳۲۸۸×۱۰$^{-۶}$	۰/۳۱۵۲×۱۰$^{-۶}$	۰/۳۰۶۶×۱۰$^{-۶}$	۰/۳۰۲۰×۱۰$^{-۶}$	۰/۳۰۰۲×۱۰$^{-۶}$
روش ارائه شده با ۹ =N	۰/۱۱۵۵×۱۰$^{-۱۰}$	۰/۹۳۸۱×۱۰$^{-۱۱}$	۰/۶۱۴۴×۱۰$^{-۱۱}$	۰/۵۷۶۸×۱۰$^{-۱۱}$	۰/۳۹۷۲×۱۰$^{-۱۱}$
x	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱/۰
روش [۲۲] با ۹ =N	۰/۲۹۹۶×۱۰$^{-۶}$	۰/۲۹۷۷×۱۰$^{-۶}$	۰/۲۹۲۳×۱۰$^{-۶}$	۰/۲۸۱۷×۱۰$^{-۶}$	۰/۱۳۵۰×۱۰$^{-۷}$
روش ارائه شده با ۹ =N	۰/۴۷۵۹×۱۰$^{-۱۱}$	۰/۱۶۸۱×۱۰$^{-۱۱}$	۰/۷۳۴۶×۱۰$^{-۱۱}$	۰/۸۸۰۱×۱۰$^{-۱۲}$	۰/۲۲۳۹×۱۰$^{-۸}$

مثال ٥. معادلهٔ انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبهٔ دوم با این شرایط اولیه را در نظر می‌گیریم [۲۰]:

$$(x+4)^{2}y^{''}(x)-(x+4)\,y^{'}(x)+y(x-1)-y^{'}(x-1)=\ln(x+3)-\frac{1}{x+3}+3\ln(3)-5\ln(5)+\int_{-1}^{1}y(t)dt,$$

$$y(0)=\ln(4),\ \ y^{'}(0)=\frac{1}{4}.$$

که دارای جواب دقیق $y(x)=\ln(x+4)$ است. خطای جواب تقریبی برای ۷ =N، با استفاده از روش بخش ۳ و مقایسه انجام شده با خطای مرجع [۲۰]، در جدول ۴ مشاهده می‌شود.

جدول ۴. خطای مثال ٥

X	روش [۲۰] با ۷ =N	روش ارائه شده با ۷ =N
۰/۰	۰/۱۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۲۲۲×۱۰$^{-۱۶}$
-۰/۱	۰/۱۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۹۲۲×۱۰$^{-۱۰}$
-۰/۲	۰/۱۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۶۳۳×۱۰$^{-۹}$
-۰/۳	۰/۱۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۱۹۱×۱۰$^{-۸}$
-۰/۴	۰/۱۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۴۰۳×۱۰$^{-۸}$
-۰/۵	۰/۲۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۶۷۹×۱۰$^{-۸}$
-۰/۶	۰/۲۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۹۷۶×۱۰$^{-۸}$
-۰/۷۲	۰/۱۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۱۲۳×۱۰$^{-۷}$
-۰/8	۰/۳۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۱۳۹×۱۰$^{-۷}$
-۰/9	۰/۷۰۰×۱۰$^{-۵}$	۰/۱۴۸×۱۰$^{-۷}$
۱/۰	۰/۱۴۰×۱۰$^{-۴}$	۰/۱۶۷×۱۰$^{-۷}$

نتیجه‌گیری

در این مقاله روش هم‌محلی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم با تأخیر زمانی به‌کار گرفته شد. چنان‌که مشاهده شدهٔ در این روش ابتدا پاسخ معادله را به‌صورت بسطی از توابع لژاندر در نظر می‌گیریم و سپس با استفاده از نقاط هم‌محلی گاوس لژاندر، معادلهٔ مورد نظر به یک دستگاه معادلهٔ جبری خطی تبدیل می‌شود. در معادلهٔ (۳۲) ماتریس‌های Z، H و D ظاهر شده‌اند، چون این ماتریس‌ها خلوت (D^i با افزایش i خلوت‌تر است) هستند، بنا بر این حجم و زمان محاسبات کاهش می‌یابد، لذا روش پایدار و دارای دقت خوب و سرعت و همگرایی بالایی برخوردار است. همچنین با در نظر گرفتن جملات بیش‌تری از بسط لژاندر، دقت جواب به‌دست آمده افزایش می‌یابد. یک ویژگی قابل توجه این روش آن است که، در حالاتی که معادله دارای جواب چندجمله‌ای از درجهٔ N یا کم‌تر از N است با استفاده از این روش، جواب دقیق را به‌دست می‌آوریم. با اصلاحات کمی می‌توان این روش را برای حل یک دستگاه از معادلات انتگرال- دیفرانسیل با تأخیر زمانی از مراتب بالا با شرایط آمیخته نیز به‌کار برد.

تشکر و قدردانی

این کار با حمایت دانشگاه الزهرا انجام شده است.

منابع

1. C. T. H. Baker, "The Numerical Treatment of Integral Equations", Oxford, New York, Clarendon Press (1977).
2. M. Bocher, "Integral Equation", Cambridge University Press, London (1974).
3. V. Volterra, "Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations", Dover Publications, New York (1959).
4. T. L. Saaty, "Modern Nonlinear Equations", Dover publications, New York (1981).
5. W. Wang, C. Lin, "A New Algorithm for Integral of Trigonometric Functions with Mechanization", Appl. Math. Comput., 164 (1) (2005) 71-82.
6. M. T. Rashed, "Numerical Solution of Functional Differential, Integral and Integro-Differential Equations", Appl. Math. Comput., 156 (2004) 485-492.
7. B. G. Pachpatte, "On Mixed Volterra-Fredholm Type Integral Equations", Indian J. Pure Appl. Math., 17 (4) (1986) 488-496.

8. J. P. Kauthen, "Continuous Time Collocation Methods for Volterra-Fredholm Integral Equations", Numer. Math., 56 (5) (1989) 409-424.

9. H. Brunner, "On the Numerical Solution of Nonlinear Volterra-Fredholm Integral Equations by Collocation Methods", SIAM J. Numer. Anal., 27 (4) (1990) 987-1000.

10. Y. Ordokhani, "An Application of Walsh Functions for Fredholm-Hammerstein Integro-Differential Equations", Int. J. Contemp. Math. Science., 5 (22) (2010) 1055-1063.

11. A. Ayad, "Spline Approximation for First Order Fredholm Delay Integro-Differential Equations", Int. J. Comput. Math., 70 (3) (1999) 467-476.

12. S. Yalcinbas, M. Sezer, "The Approximate Solution of High-Order Linear Volterra Fredholm Integro-Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, Appl. Math. Comput., 112 (2000) 291-308.

13. S. H. Behiry, H. Hashish, "Wavelet Methods for the Numerical Solution of Fredholm Integro-Differential Equations", Int. J. Appl. Math., 11 (1) (2003) 27-36.

14. A. Ayad, "The Numerical Solution of First Order Delay Integro-Differential Equations by Spline Functions", Int. J. Comput. Math., 77 (2001) 125-134.

15. M. Lakestani, M. Razzaghi, M. Dehghan, "Semiorthogonal Spline Wavelets Approximation for Fredholm Integro-Differential Equations", Math. Probl. Eng., 2006 (2006) 1-12.

16. F.A. Rihan, E. H. Doha, M. I. Hassan and N. M. Kamel, "Numerical Treatments for Volterra Delay Integro-Differential equations", Computational Methods in Applid Mathematics, 9 (3) (2009) 292-308.

17. K. Maleknejad, F. Mirzaee, "Numerical Solution of Integro-Differential Equations by Using Rationalized Haar Functions Method", Kybernetes Int. J. Syst. Math., 35 (10) (2006) 1735-1744.

18. M. Sezer, M. Gülsu, "Polynomial Solution of the Most General Linear Fredholm Integro-Differential-Difference Equations by Means of Taylor Matrix Method", Complex Variables and Elliptic Equations, 50 (5) (2005) 367-382.

19. M. Gülsu, M. Sezer, "Approximations to the Solution of Linear Fredholm Integro-Differential-Difference Equation of High Order", Journal of the Franklin Institute, 343 (2006) 720-737.

20. M. Gülsu, Y. Öztürk, M. Sezer, "A new Collocation Method for Solution of Mixed Linear Integro- Differential- Difference Equations", Appl. Math. Comput., 216 (2010) 2183-2198.

21. A. Saadatmandia, M. Dehghan, "Numerical Solution of the Higher- Order Linear Fredholm Integro-Differential-Difference Equation with Variable Coefficients", Comput. Math. Appl., 59 (2010) 2996-3004.

22. S. Yalcinbas, M. Sezer, H. Hilmi Sorkun, "Legendre Polynomial Solutions of High-Order Linear Fredholm Integro- Differential Equations", Appl. Math. Comput., 210 (2009) 334-349.

23. C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer- Verlag, New York. (1988).