

## تعیین ساختار همبستگی داده‌های فضایی و فضایی-زمانی با توابع مفصل

مهدی امیدی، محسن محمدزاده\*  
دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم، گروه آمار

### چکیده

توابع مفصل برای ساخت توزیع توأم متغیرهای وابسته بر اساس توزیع‌های کناری ابزارهایی قوی هستند. هر يك از این توابع مدلی ارائه می‌کنند که با آن تمام خصوصیات وابستگی متغیرها قابل بیان است. در تحلیل داده‌های فضایی لازم است بر اساس توزیع چندمتغیره میدان تصادفی ساختار همبستگی داده‌ها مشخص شود. برای داده‌های فضایی زمانی نیز لازم است ساختار ارتباط فضایی و زمانی در قالب تابع کوواریانس بیان شود. گاهی برای راحتی، از توابع کوواریانس فضایی-زمانی تفکیک‌پذیر استفاده می‌شود؛ اما این ویژگی در برخی موارد واقع‌گرایانه نیست و ضروری است به‌کارگیری توابع کوواریانس فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر باشد. در این پژوهش، با توجه به ویژگی‌های همبستگی داده‌های فضایی نقش توابع مفصل در تعیین توزیع توأم میدان تصادفی بررسی و شرایط اعتبار تابع مفصل فضایی تعیین می‌شود سپس خانواده جدیدی از توابع مفصل فضایی معتبر معرفی خواهد شد. آن‌گاه با استفاده از این توابع مفصل به ساخت توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر معتبر اقدام می‌شود.

### مقدمه

پیش‌گویی مقدار میدان تصادفی در مکان‌های فاقد مشاهده در آمار فضایی، معمولاً با فرض گاوسی بودن میدان تصادفی انجام می‌شود. اما این فرض در برخی مسائل واقع‌گرایانه نیست و باید توزیع میدان تعیین شود. یکی از روش‌های تعیین توزیع توأم متغیرهای تصادفی استفاده از توابع مفصل<sup>۱</sup> است. اسکالر [۱۹] این توابع را اولین بار معرفی کرد، جو [۱۱] و نلسن [۱۸] خانواده‌های متعدد این توابع را که در علوم مختلف به‌کار می‌رود جمع‌آوری کردند. امیدی و همکاران [۱] خانواده‌های مفصل مناسب برای مدل‌بندی خشک‌سالی در استان تهران را بررسی کردند. امیدی و محمدزاده [۲] با روی‌کرد بیز تجربی برآورد پارامتر تابع مفصل را به‌دست آوردند. باردوسی [۳] برای اولین بار از مفصل گاوسی و مفصل‌خی-دو غیرمرکزی در تحلیل داده‌های فضایی استفاده کرد. باردوسی و لای [۴] از مفصل  $V$ -تبدیل‌یافته نرمال چند متغیره برای پیش‌گویی خصوصیات مکانی آب‌های زیرزمینی استفاده کردند. گرایلر و پیسما [۱۰] با استفاده از ترکیب خطی از توابع مفصل، تابع مفصل فضایی معتبر ساخته و از آن در پیش‌گویی فلزات سنگین در رودخانه میوز استفاده کردند. تعیین توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی<sup>۲</sup> مسئله مهم در تحلیل داده‌های همبسته فضایی و زمانی است. کرسی و هوانگ [۵] از تابع

واژه‌های کلیدی: داده‌های فضایی، تابع مفصل فضایی، توابع کوواریانس فضایی زمانی.

پذیرش ۹۲/۹/۲۴

دریافت ۹۲/۳/۲۲

\*نویسنده مسؤل mohsen\_m@modares.ac.ir

طیفی برای ساخت توابع کوواریانس فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر استفاده کردند. این روش را گنیتینگ [۸] با استفاده از توابع کاملاً یکنوا و برنشتاین تعمیم دادند. ما در [۱۴] و [۱۶] بر اساس ترکیب‌های محدب از توابع کوواریانس معتبر و استفاده از تبدیل‌های لاپلاس رده جدیدی از توابع کوواریانس فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر را معرفی کرد. کنت و همکاران [۱۲] نشان دادند که مدل گنیتینگ [۸] برای برخی از توابع کاملاً یکنوا و برنشتاین دالای گودالی<sup>۱</sup> است که استفاده از آن‌ها را به‌گونه‌ای محدود می‌کند. در این پژوهش ابتدا نقش توابع مفصل در تعیین توزیع تحقق‌های میدانی تصادفی بررسی و یک تابع مفصل فضایی معتبر و جدید معرفی می‌شود، سپس با استفاده از توابع مفصل روش‌هایی برای ساخت توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی معتبر ارائه می‌شود.

### توابع مفصل

برای دو متغیر تصادفی پیوسته  $X$  و  $Y$  به‌ترتیب با توابع توزیع  $F_X(x)$  و  $G_Y(y)$  و تابع توزیع توأم  $H(x, y)$ ، توابع مفصلی مانند  $K(\cdot, \cdot)$  وجود دارند که برای هر  $x$  و  $y$  در  $\bar{R} = R \cup (-\infty, \infty)$  داریم:

$$H(x, y) = K(F_X(x), G_Y(y))$$

اگر  $F_X$  و  $G_Y$  مطلقاً پیوسته باشند، تابع مفصل  $K$  یکتاست. اگر  $f_X(x)$  و  $f_Y(y)$  توابع چگالی کناری  $X$  و  $Y$  باشند، آن‌گاه تابع چگالی توأم آن‌ها بدین‌صورت است:

$$f_{X,Y}(x, y) = k(F_X(x), G_Y(y))f_X(x)f_Y(y)$$

که در آن  $k$  تابع مفصل چگالی توأم است و از رابطه  $k(u, v) = \frac{\partial^2 K(u, v)}{\partial u \partial v}$  به‌دست می‌آید. برای هر تابع مفصل کران‌هایی بدین‌صورت وجود دارند:

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq K(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v) \quad (1.2)$$

که با  $M(\cdot, \cdot)$  و  $W(\cdot, \cdot)$  نشان داده می‌شوند و به‌ترتیب کران‌های بالا و پایین فرشه-هافدینگ نامیده می‌شوند [۱۱]. بنا بر (۱.۲) در مفصل کران بالا حداکثر هم‌آهنگی و در مفصل کران پایین حداکثر ناهم‌آهنگی وجود دارد. برای دو متغیر تصادفی مستقل تابع مفصل حاصل‌ضرب به‌صورت  $\Pi(u, v) = uv$  تعریف می‌شود.

**قضیه ۱.۲.** (تلسن [۱۸]) اگر  $\varphi(t)$  تابعی پیوسته اکیداً نزولی از  $[1, 0]$  به  $[0, \infty]$  با شرط  $\varphi(1) = 0$  و وارون  $\varphi^{-1}(t)$  باشد، آن‌گاه

$$K(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (2.2)$$

یک تابع مفصل است، اگر و فقط اگر  $\varphi(t)$  محدب باشد.

۱. Dimple

مجموعه توابع مفصل ساخته شده بر اساس رابطه (۲.۲) خانواده ارشمیدسی است و  $\varphi(t)$  تابع مولد مفصل ارشمیدسی نامیده می‌شود.

### توابع مفصل فضایی

در آمار فضایی پیش‌گویی میدان تصادفی  $Z = \{Z(s); s \in D \subset R^d\}$  در موقعیت مشخص  $s$  بر اساس تحقق‌های میدان تصادفی، یعنی  $z = (z(s_1), \dots, z(s_n))$ ، در موقعیت‌ها انجام می‌شود. معمولاً این پیش‌گویی با فرض گاوسی بودن میدان تصادفی صورت می‌پذیرد. اما گاهی این فرض در عمل واقع‌گرایانه نیست و لازم است توزیع توأم  $Z = (Z(s_1), \dots, Z(s_n))$  تعیین شود.

برای حالت دو متغیره، با معلوم بودن توزیع متغیرهای تصادفی  $Z(s_1)$  و  $Z(s_2)$  و با استفاده از تابعی مفصل مانند  $K_h(\cdot, \cdot)$ ، که در آن  $h = s_2 - s_1$  است، توزیع توأم آن‌ها را می‌توان بدین‌صورت به‌دست آورد:

$$P(Z(s_1) \leq z_1, Z(s_2) \leq z_2) = K_h(F_Z(z_1), F_Z(z_2))$$

با توجه به خواص وابستگی داده‌های فضایی، تابع مفصل  $K_h(\cdot, \cdot)$  در صورتی معتبر است که اولاً همواره وابستگی مثبت را نتیجه دهد؛ ثانیاً وقتی  $\|h\|$  به بی‌نهایت میل کند، تابع مفصل حاصل ضرب و موقعی که به صفر میل کند، کران بالای فرشه هافدینگ را نتیجه دهد؛ یعنی

$$\lim_{\|h\| \rightarrow \infty} K_h(u, v) = uv, \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} K_h(u, v) = M(u, v)$$

اغلب توابع مفصل ارائه شده در منابع لزوماً واجد شرایط مفصل فضایی معتبر نیستند. بنا بر این در ادامه چند تابع مفصل فضایی معتبر معرفی می‌شوند.

**مفصل گاوسی.** تابع مفصل گاوسی بدین‌صورت است:

$$K_h(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\cdot, \Lambda_h}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

که در آن  $\Phi^{-1}(\cdot)$  وارون تابع توزیع نرمال استاندارد و  $\Phi_{\cdot, \Lambda_h}^{-1}(\cdot)$  مفصل گاوسی با میانگین صفر و تابع کوواریانس  $\Lambda_h$  است. از آنجا که این مفصل برای همبستگی صفر تابع مفصل استقلال و برای همبستگی يك کران بالای فرشه-هافدینگ را نتیجه می‌دهد، تابعی مفصل فضایی معتبر است.

بر اساس تابع مفصل گاوسی و تبدیل‌هایی از توزیع نرمال چندمتغیره، می‌توان مفصل‌های فضایی معتبر ساخت، که در ادامه معرفی می‌شوند.

**مفصل خی دو غیرمرکزی.** باردوسی [۳] با استفاده از تبدیل  $g(Y) = Y^2$ ، که در آن  $Y$  دارای توزیع نرمال چندمتغیره است، مفصل خی دوی غیرمرکزی را با تابع مفصل چگالی بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$k_h(u, v) = \frac{K_r}{\sqrt{\xi \pi xy}} \exp\left\{ \frac{-2\sqrt{xy}\rho_h + (x+y)\rho_h^2}{2(\rho_h^2 - 1)} \right\} (1 + \exp\left\{ \frac{2\sqrt{xy}\rho_h}{\rho_h^2 - 1} \right\})$$

که برای همبستگی صفر استقلال و برای همبستگی يك کران بالای فرشه-هافدینگ را نتیجه می‌دهد.

توزیع  $V$  - تبدیل یافته تابع مفصل نرمال چندمتغیره. این مفصل را باردوسی و لای [۴] و با استفاده از تبدیل

$$X_j = g(Y_j) = \begin{cases} k(Y_j - 1) & Y_j \geq m \\ m - Y_j & Y_j < m \end{cases}$$

معرفی کردند؛ به طوری که توزیع‌های  $Y$  و  $n$ -متغیره  $X$  به ترتیب به صورت

$$F_1(x) = \Phi\left(\frac{k}{m} + 1\right) - \Phi(-x - 1)$$

$$\begin{aligned} F_n(x_1, \dots, x_n) &= \Phi_{\cdot, \Lambda_n}\left(\frac{k}{m} + 1\right) - \Phi_{\cdot, \Lambda_n}(-x - 1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \Phi_{\cdot, \Lambda_n}(\xi_i + m) \end{aligned}$$

به دست می‌آیند، که در آن  $\xi_i^T = \{b(-1)^i x_1, \dots, b(-1)^i x_n\}$  و

$$b(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ \frac{1}{k} & x = 0 \end{cases}$$

تابع مفصل فضایی معتبر متناظر با این تبدیل به صورت

$$K_h(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \Phi_{\cdot, \Lambda_n}(\xi_i + m)$$

به دست می‌آید، که در  $\xi_i^T = \{b(-1)^i F_1^{-1}(u_1), \dots, b(-1)^i F_n^{-1}(u_n)\}$ .

**مفصل ترکیبی نوع ۱.** گرایلر و پیسما [۱۰] بر اساس تأخیرهای فضایی  $\{h_{s_1}, \dots, h_{s_\ell}\}$  و ترکیب خطی از

توابع مفصل، یک تابع مفصل فضایی معتبر به صورت

$$\begin{cases} \lambda_1 M(u, v) + (1 - \lambda_1) K_{1,h}(u, v) & 0 \leq h \leq h_{s_1} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_i K_{i-1,h}(u, v) + (1 - \lambda_i) K_{i,h}(u, v) & h_{s_{i-1}} \leq h \leq h_{s_i} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_\ell K_{\ell,h}(u, v) + (1 - \lambda_\ell) \Pi(u, v) & h_{s_{\ell-1}} \leq h \leq h_{s_\ell} \end{cases} \quad (3.3)$$

تعریف کردند، که در آن  $\lambda_i = \frac{h_i - h}{h_i - h_{i-1}}$  است.

**مفصل ترکیبی نوع ۲:** با ایده گرفتن از مفصل ترکیبی نوع ۱ که از میانگین حسابی موزون استفاده می‌شود.

## ۱. Spatial Lag

می‌توان مفصل فضایی جدیدی بر اساس میانگین هندسی موزون دو تابع مفصل ارائه کرد. اما میانگین هندسی دو تابع مفصل لزوماً يك تابع مفصل نیست. بنا بر این در اینجا خانواده‌های خاص از توابع مفصل برای ساخت يك تابع مفصل فضایی معتبر معرفی می‌شود.

**تعریف ۱.۳.** تابع مفصل  $K(u, v)$  ماکسیمال تقسیم‌پذیر نامتناهی<sup>۱</sup> ( $Max - id$ ) نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر عدد حقیقی مثبت  $r$ ،  $K^r(u, v)$  نیز تابع مفصل باشد.

جو [۱۱] ویژگی‌های این توابع را بررسی کرد و کلین و همکاران [۱۳] نیز نشان دادند برخی از توابع مفصل از جمله خانواده‌های توابع مفصل کلایتون به ازای  $\theta > 0$ ، فرانک به ازای  $\theta > 0$  و علی-میخائیل-حق به ازای  $\theta > 0$ ،  $Max - id$  هستند.

**قضیه ۱.۳.** اگر  $K_i(u, v)$  برای  $i = 1, \dots, \ell$  توابع مفصل  $Max - id$ ،  $M(u, v)$  کران بالای فرشه-هافدینگ،

$\Pi(u, v)$  مفصل حاصل ضرب و  $\{h_{s_1}, \dots, h_{s_\ell}\}$  تأخیرهای فضایی<sup>۲</sup> باشند، آنگاه برای عبارت  $\lambda_i = \frac{h_i - h}{h_i - h_{i-1}}$

$$\begin{cases} M^{\lambda_1}(u, v) K_{1,h}^{(1-\lambda_1)}(u, v) & 0 \leq h \leq h_{s_1} \\ \vdots & \vdots \\ K_{i-1,h}^{\lambda_i}(u, v) K_{i,h}^{(1-\lambda_i)}(u, v) & h_{s_{i-1}} \leq h \leq h_{s_i} \\ \vdots & \vdots \\ K_{\ell,h}^{\lambda_\ell}(u, v) \Pi^{(1-\lambda_\ell)}(u, v) & h_{s_{\ell-1}} \leq h \leq h_{s_\ell} \end{cases} \quad (3.4)$$

تابعی مفصل فضایی معتبر است.

**اثبات:** برای بازه اول در رابطه (۳.۴) که فاصله‌های با اندازه نزدیک به صفر را در بر می‌گیرد، تابع مفصل به‌گونه‌ای است که حداکثر همبستگی، یعنی کران بالای فرشه-هافدینگ را در بر گیرد. در بازه آخر برای فاصله‌های نسبتاً بزرگ نیز تابع مفصل به سمت عدم همبستگی فضایی یعنی مفصل حاصل ضرب میل می‌کند. از آنجا که برای هر دو تابع مفصل  $Max - id$  مانند  $K_1(u, v)$  و  $K_2(u, v)$  میانگین هندسی موزون آن‌ها، یعنی

$$K(u, v) = K_1^\alpha(u, v) K_2^{1-\alpha}(u, v) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

نیز يك تابع مفصل است (کلین و همکاران [۱۳])، شرایط برای سایر بازه‌های رابطه (۳.۴) نیز برقرارند. دو نوع تابع مفصل (۳.۳) و (۳.۴) ویژگی تابع مفصل فضایی معتبر را بر اساس فاصله‌ها حفظ می‌کنند، با این شرط که انتخاب خانواده مفصل مناسب در هر بازه به‌گونه‌ای باشد که همواره همبستگی مثبت را نتیجه داده و با افزایش فاصله موقعیت‌ها همبستگی کاهش یابد؛ برای عنوان مثال تابع مفصل گامبل-بارنت که به ازای  $[1, 0]$   $\theta \in$  به صورت  $K(u, v) = uv \exp(-\theta \log u \log v)$  است، همواره همبستگی منفی را نتیجه می‌دهد و به عنوان تابع مفصل فضایی معتبر استفاده نمی‌شود.

۱. Maximal Infinitely Divisible

۲. Spatial lag

## توابع مفصل و همبستگی فضایی

مفصل‌ها ابزاری برای مدل‌بندی ساختار همبستگی متغیرهای تصادفی وابسته هستند. بسیاری از خانواده‌های این توابع می‌توانند وابستگی کامل مثبت و منفی را برای داده‌های وابسته پوشش دهند. داده‌های فضایی وابسته مثبت هستند و ساختار همبستگی آن‌ها با توابع کوواریانس همیشه مثبت بیان می‌شود. در این بخش نقش توابع مفصل در ساخت توابع کوواریانس فضایی معتبر بیان می‌شود.

**تعریف ۱.۴.** تابع پیوسته مثبت  $\phi(t)$  به ازای  $t \geq 0$ ، تابعی کاملاً یکنوا<sup>۱</sup> است، اگر مشتق‌های تمام مراتب آن وجود داشته و

$$(-1)^n \phi^{(n)}(t) \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

طبق قضیه برنشتاین (فلر [۷]) تابع مثبت  $\phi(t)$  با شرط  $\phi(0) = 1$  کاملاً یکنواست اگر و تنها اگر تبدیل لاپلاس از یک تابع کراندار نامنفی باشد، یعنی

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} e^{-at} dM(a), \quad t > 0$$

که در آن  $M(\cdot)$  یک اندازه کراندار نامنفی است.

**تعریف ۲.۴.** تابع پیوسته مثبت  $\psi(t)$  به ازای  $t \geq 0$ ، یک تابع برنشتاین<sup>۲</sup> است، هرگاه مشتق اول آن یک تابع کاملاً یکنوا باشد.

**قضیه ۱.۴.** (میلر و سامکو [۱۷]) اگر  $\phi_1(t)$  و  $\phi_2(t)$  توابعی کاملاً یکنوا و  $\psi(t)$  تابعی برنشتاین باشد، آن‌گاه  $\phi_1(t) + \phi_2(t)$ ،  $\phi_1(t)\phi_2(t)$  و  $\phi_1(\psi(t))$  نیز کاملاً یکنوا هستند.

**قضیه ۲.۴.** اگر  $\psi_1(t)$  و  $\psi_2(t)$  دو تابع برنشتاین باشند، آن‌گاه  $\psi(t) = \psi_1(\psi_2(t))$  برنشتاین است.

اثبات: چون

$$\psi'(t) = \psi_1'(\psi_2(t)) \psi_2'(t)$$

بنا به فرض  $\psi_1(t)$  و  $\psi_2(t)$  برنشتاین هستند، بنا بر این طبق تعریف مشتق‌های  $\psi_1'(t)$  و  $\psi_2'(t)$  توابعی کاملاً یکنوا است و بنا بر قضیه ۱.۴ تابع  $\psi(t)$  برنشتاین است.

**قضیه ۳.۴.** (ما [۱۶]) فرض کنید  $\phi(t)$  تابعی کاملاً یکنوا روی  $[0, \infty)$  یا به‌طور معادل تبدیل لاپلاسی از یک تابع غیرنزولی کراندار باشد، در این صورت

$$C_s(h) = \phi(\|h\|^2), \quad h \in R^d$$

یک تابع کوواریانس فضایی مانا در  $R^d$ ،  $d \geq 1$  است.

**نتیجه ۱.۴.** چون  $t^\rho$  به ازای  $\rho \in [1, 0]$  تابعی برنشتاین است، برای هر تبدیل لاپلاس  $\phi(t)$ ، بنا بر قضیه ۱.۴ تابع  $\phi(t^\rho)$  کاملاً یکنوا و تبدیل لاپلاس است. بنا بر این با فرض  $\alpha = 2\rho$ ، آن‌گاه تابع  $C_s(h) = \phi(\|h\|^\alpha)$  به ازای هر  $\alpha \in [2, 0]$  تابعی کوواریانس پیوسته فضایی مانای معتبر است.

۱. Completely Monotone

۲. Bernstein

**نتیجه ۲.۴.** چون وارون تابع مولد يك مفصل ارشمیدسی تابعی کاملاً یکنوا است، می‌توان بر اساس آن توابع کوواریانس فضایی یا زمانی معتبر ساخت.

**مثال ۱.۴.** تابع مولد مفصل ارشمیدسی فرانک به‌ازای  $\theta \in R - \{0\}$  به‌صورت  $\phi(t) = -\ln\left\{\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right\}$

و وارون آن به‌صورت  $-\frac{1}{\theta} \ln\{(\exp(-\theta) - 1)e^{-t} + 1\}$  است.

حال بنا بر نتیجه ۱.۴ تابع  $-\frac{1}{\theta} \ln\{(\exp(-\theta) - 1)e^{-\|h\|^\rho} + 1\}$  به‌ازای  $\rho \in [0, 2]$  يك کوواریانس فضایی معتبر است.

در جدول ۱ برخی از توابع مفصل خانواده ارشمیدسی به‌همراه تابع کوواریانس فضایی معتبر متناظر آن‌ها ارائه شده است.

جدول ۱. خانواده توابع مفصل ارشمیدسی و تابع کوواریانس فضایی متناظر آن‌ها

تابع مفصل	تابع مولد	تابع کاملاً یکنوا	فضای پارامتر	تابع کواریانس
جو	$-\ln(1 - (1-t)^\theta)$	$1 - (1 - e^{-t})^\theta$	$[1, \infty)$	$1 - (1 - e^{-\ h\ ^\rho})^\theta$
علی-میخاییل-حق	$\ln \frac{1 - \theta(1-t)}{t}$	$\frac{1 - \theta}{\exp(t) - \theta}$	$[-1, 1)$	$\frac{1 - \theta}{\exp(\ h\ ^\rho) - \theta}$
گامیل-بارنت	$\ln(1 - \theta \ln t)$	$\exp\left\{\frac{1 - e^{-t}}{\theta}\right\}$	$[0, 1)$	$\exp\left\{\frac{1 - e^{-\ h\ ^\rho}}{\theta}\right\}$
گامیل-هوگارد	$(-\ln t)^\theta$	$\exp\left\{-t^{\frac{1}{\theta}}\right\}$	$[1, \infty)$	$\exp\{-t^\rho\}$

**مثال ۲.۴.** دو تابع مولد مفصل ارشمیدسی  $\phi(t) = (1-t)^\theta$  و  $\phi_\gamma(t) = \frac{1-t}{1+(\theta-1)t}$  (نلسن [۱۸]) به‌ازای

$\theta \in [1, \infty)$  با وارون‌های  $\phi_\gamma^{-1}(t) = 1 - t^{\frac{1}{\theta}}$  و  $\phi^{-1}(t) = \frac{t-1}{(\theta-1)t-1}$  هستند. با وجود این‌که این توابع کاملاً

یکنوا هستند اما تابع  $\phi_\gamma^{-1}(t) = 1 - \|h\|^\theta$  و  $\phi^{-1}(t) = \frac{\|h\| - 1}{(\theta-1)\|h\| - 1}$  برای بعضی از مقادیر  $\|h\|$  منفی

هستند، که مغایر با همبستگی مثبت داده‌های فضایی است.

مثال ۲.۴ بیان‌گر آن است که نتیجه ۲.۴ لزوماً برای همه توابع مفصل برقرار نیست.

### ساخت تابع کوواریانس فضایی-زمانی

داده‌های فضایی که در طول زمان وابسته باشند، داده‌های فضایی-زمانی نامیده می‌شوند و با میدان تصادفی  $\{Z(s, t); (s, t) \in D \times T\}$  مدل‌بندی می‌شوند، که در آن  $D \subset R^d$ ،  $T \subset R$ ،  $s$  موقعیت فضایی و  $t$  موقعیت زمانی مشاهده را نشان می‌دهند. تابع کوواریانس فضایی-زمانی میدان تصادفی مانای مرتبه دوم به-صورت

$$C(h_s, h_t) = Cov(Z(s, t), Z(s + h_s, t + h_t)) \quad ; (s, t) \in D \times T$$

تعریف می‌شود، که در آن  $h_s$  و  $h_t$  به ترتیب تاخیرهای فضایی و زمانی هستند.

ما [۱۵] نشان داد اگر  $C_t(h_t)$  و  $C_s(h_s)$  به ترتیب دو تابع کوواریانس فضایی و زمانی در فضای  $R^d$  و  $R$

باشند آن‌گاه توابع

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = \int C_s(uh_s)C_t(vh_t)dW(u, v) \quad (۶.۵)$$

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = \int [C_s(h_s)]^u [C_t(h_t)]^v dW(u, v) \quad (۷.۵)$$

کوواریانس‌های فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر معتبر هستند، که در آن‌ها  $W(u, v)$  اندازه غیرمنفی و کراندار در  $R^d \times R$  است.

چون توابع مفصل فضایی کراندار و مثبت هستند، با جای‌گذاری هر تابع مفصل  $K(u, v)$  به جای  $W(u, v)$  در

روابط (۶.۵) و (۷.۵) توابع کوواریانس فضایی-زمانی معتبر حاصل می‌شود.

**نتیجه ۱.۵.** با جای‌گذاری توابع مفصل

$$K(u, v) = pW + (1-p-q)\Pi + qM$$

$$K(u, v) = \text{Max}\{\theta\Pi + (1-\theta)W, 0\}$$

در روابط (۶.۵) و (۷.۵)، به دلیل این‌که  $dK(u, v) = \alpha dudv$ ، و در آن  $\alpha$  مقداری مثبت است، توابع

کوواریانس به صورت حاصل ضرب دو تابع کوواریانس فضایی و زمانی به دست می‌آید.

جو [۱۱] برای چند خانواده از تبدیلات لاپلاس نشان داد که اگر  $\phi_\theta(t)$  تابعی کاملاً یکنوا باشد، آن‌گاه

$\phi_\theta^{-1}(\phi_\theta(t))$  برای  $\theta_1 \geq \theta_2$  متعلق به کلاس توابع برنشتاین\* است، که برای هر  $\zeta^* \in w$  روابط  $w(0) = 0$  و

$w(\infty) = \infty$  برقرار هستند.

**نتیجه ۲.۵.** اگر  $\phi_\theta(t)$  تابع مولد مفصل ارشمیدسی باشد، آن‌گاه وارون آن  $\phi_\theta(t)$  تابعی کاملاً یکنوا است

و  $\phi_{\theta_1}(\phi_{\theta_2}(t))$  یا به طور معادل  $\phi_{\theta_1}^{-1}(\phi_{\theta_2}(t))$  تابعی برنشتاین در کلاس\* است.

گنیتینگ [۸] نشان داد اگر  $\phi(t)$  تابعی کاملاً یکنوا و  $\psi(t)$  تابعی برنشتاین با شرایط  $\psi(0) = 1$  و  $\psi(\infty) = \infty$

باشد، آن‌گاه

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = \frac{1}{\psi(h_t^*)^{\frac{d}{2}}} \phi\left(\frac{\|h_s\|^2}{\psi(h_t^*)}\right)$$

تابع کوواریانس فضایی زمانی مانا در  $R^d \times R$  است.

**نتیجه ۳.۵.** با توجه به نتیجه ۲.۵ از تابع مولد مفصل ارشمیدسی می‌توان توابع کاملاً یکنوا و برنشتاین ساخت.

چون تابع برنشتاین در کلاس توابع کوواریانس گنیتینگ باید در شرط  $\psi(0) = 1$  صدق کند، برای صدق کردن

کلاس توابع\* در تابع کوواریانس گنیتینگ کافی است مقدار توابع این کلاس در نقطه صفر با عدد یک جمع

شود. بر این اساس با توجه به تابع مولد مفصل ارشمیدسی تابع برنشتاینی که در تابع کوواریانس گنیتینگ صدق

کند به ازای  $\theta_1 \geq \theta_2$  به صورت  $\theta_1 + 1 + \phi_{\theta_1}^{-1}(\phi_{\theta_2}(t))$  به دست می‌آید. به عنوان مثال برای تابع مفصل کلاپتون تابع

کاملاً یکنوای  $\phi_{\theta_1}(t) = (1+t)^{-\frac{1}{\theta_1}}$  و تابع برنشتاین  $\phi_{\theta_2}(t) = 1 - t^\rho$  به دست می‌آید، که در آن  $\rho = \frac{\theta_2}{\theta_1}$ .

گنیتینگ [۹] نشان داد اگر  $C_s^r(h_s)$  و  $C_t^r(h_t)$  به ترتیب توابع کواریانس مانای فضایی و زمانی در  $R^d$  و  $R$  باشند، آنگاه برای اندازه متناهی و نامنفی  $\mu(\cdot)$  عبارت

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = \int C_s^r(h_s) C_t^r(h_t) d\mu(r) \quad (9.5)$$

یک تابع کواریانس فضایی-زمانی مانا در  $R^d \times R$  است.

**قضیه ۱.۵.** اگر  $\varphi$ ،  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  توابع مولد مفصل ارشمیدسی باشند، آنگاه تابع

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = \varphi_{\theta_1}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(a \|h\|^{\alpha})) + \varphi_{\theta_2}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(b |h|^{\beta})) \quad (10.5)$$

به ازای  $\alpha \in (0, 2]$ ،  $\beta \in [0, 2]$ ،  $\theta_1 \geq \theta_2$ ،  $\theta_1 \geq \theta_2$  و  $a$  و  $b$  مثبت یک تابع کواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در  $R^d \times R$  است.

**اثبات:** چون  $\exp(-t)$  کاملاً یکنوا است و  $\varphi_{\theta_1}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(at^{\alpha}))$  و  $\varphi_{\theta_2}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(bt^{\alpha}))$  به ازای  $\rho_1 \in (0, 1]$

و  $\rho_2 \in (0, 1]$  مثبت برنشتاین هستند، از همین رو، بنا به نتیجه ۱.۴ به ازای  $\alpha = 2\rho_1$  و  $\beta = 2\rho_2$  تابع  $\exp(-\varphi_{\theta_1}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(a \|h\|^{\alpha})))$  و  $\exp(-\varphi_{\theta_2}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(b |h|^{\beta})))$  کواریانس فضایی و تابع  $\exp(-\varphi_{\theta_1}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(a \|h\|^{\alpha})))$  کواریانس زمانی

معتبر هستند. با جای‌گذاری این روابط به جای  $C_s(h_s)$  و  $C_t(h_t)$  در (۹.۵) داریم

$$\int e^{-r(\varphi_{\theta_1}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(a \|h\|^{\alpha})) + \varphi_{\theta_2}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(b |h|^{\beta})))} d\mu(r) = \varphi_{\theta_1}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(a \|h\|^{\alpha})) + \varphi_{\theta_2}^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(b |h|^{\beta}))$$

که نشان می‌دهد (۱۰.۵) تابعی کواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در  $R^d \times R$  است.

**مثال ۱.۵.** اگر  $\varphi$ ،  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  از مفصل کلایتون انتخاب شوند، آنگاه تابع

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = [(1 + a \|h\|^{\alpha})^{r_1} + (1 + b |h|^{\beta})^{r_2} - 1]^{-\frac{1}{\theta_1}} \quad (11.5)$$

به ازای  $0 \leq r_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1} \leq 1$ ،  $0 \leq r_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1} \leq 1$ ،  $\alpha \in (0, 2]$ ،  $\beta \in [0, 2]$ ،  $\theta_1 \geq 0$  و  $a$  و  $b$

مثبت تابعی کواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در  $R^d \times R$  است.

لازم به ذکر است که با فرض  $r_1 = r_2 = 1$ ، رابطه (۱۱.۵) تابع کواریانس فضایی-زمانی دیاکو و همکاران [۶]

را نتیجه می‌دهد.

**مثال ۲.۵.** اگر  $\varphi$ ،  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  از مفصل گامبل-هوگارد انتخاب شوند، آنگاه تابع

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = \exp\{-[a \|h\|^{\alpha} + b |h|^{\beta}]^{-\frac{1}{\theta_1}}\}$$

به ازای  $\alpha \in (0, 2]$ ،  $\beta \in [0, 2]$ ،  $\theta_1 \geq 1$  و  $a$  و  $b$  مثبت یک تابع کواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در

$R^d \times R$  است.

مثال ۳.۵. اگر  $\varphi$  از مفصل کلاپتون و  $\varphi_r$  از مفصل گامیل-هوگارد انتخاب شوند، آنگاه

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = \exp\{-(1+a\|h\|^\alpha)^{r_1} + (1+b|h_t|^\beta)^{r_2} - 2\}^{\frac{1}{\theta}}$$

به ازای  $1 \leq r_1 \leq \infty$ ،  $0 \leq r_2 \leq 1$ ،  $\alpha \in (0, 2]$ ،  $\beta \in [0, 2]$ ،  $\theta_1 \geq 1$  و  $a$  و  $b$  مثبت یک تابع کوواریانس فضایی-زمانی مانای معتبر در  $R^d \times R$  است. در جدول ۲ توابع کوواریانس فضایی-زمانی معتبر برای این دو خانواده ارائه شده‌اند، که در آن‌ها  $0 \leq r \leq 1$ ،  $\alpha \in (0, 2]$ ،  $\beta \in [0, 2]$  و  $a$  و  $b$  مثبت هستند.

جدول ۲. خانواده توابع مفصل و تابع کوواریانس فضایی-زمانی متناظر آن‌ها

تابع کوواریانس فضایی-زمانی	فضای پارامتر	تابع مولد		
		$\phi_r$	$\phi_1$	$\phi_2$
$[a\ h_s\ ^a + b h_t ^\beta]^{-\frac{1}{\theta}}$	$(0, \infty)$	گامیل-هوگارد	گامیل-هوگارد	کلاپتون
$\{[1+a\ h_s\ ^a]^r + b h_t ^\beta\}^{-\frac{1}{\theta}}$	$(0, \infty)$	گامیل-هوگارد	کلاپتون	کلاپتون
$\exp\{-[a\ h_s\ ^a + (1+b h_t ^\beta)^r + 1]^{-\frac{1}{\theta}}\}$	$[1, \infty)$	گامیل-هوگارد	کلاپتون	گامیل-هوگارد

## بحث و نتیجه‌گیری

توابع مفصل ابزاری مناسب برای مدل‌بندی توزیع توأم متغیرهای تصادفی هستند. گستردگی و انعطاف‌پذیری این توابع امکان ساخت توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر را فراهم می‌سازد. در این مقاله یک تابع مفصل فضایی جدید معرفی و بر اساس ساختار توابع مفصل اقدام به ساخت توابع کوواریانس فضایی و فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر شد و در ادامه معتبر بودن آن‌ها نیز از لحاظ نظری بررسی شد. هر چند که بررسی معتبر بودن توابع معرفی شده در این مقاله با توجه به ساختار توابع مفصل از لحاظ نظری امکان‌پذیر است اما بررسی معتبر بودن توابع مفصل فضایی، کوواریانس فضایی و کوواریانس فضایی-زمانی تفکیک‌ناپذیر ممکن است فقط برای توابع مفصل خاص میسر باشد.

## قدردانی و تشکر

نویسندگان از داوران محترم مجله که نظرات ارزنده آن‌ها موجب بهبود مقاله شد و نیز از حمایت قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد، قدردانی می‌کنند.

## منابع

۱. م. امید، م. محمدزاده، س. مرید، تحلیل احتمالاتی مدت-شدت خشکسالی در استان تهران با استفاده از توابع مفصل، مجله تحقیقات آب و خاک ایران، (۴۱) (۱۳۸۸) ۹۵-۱۰۱.

۲. م. امید، م. محمدزاده، مدل‌بندی درست‌نمایی و بیز تجربی تابع مفصل برای مدل‌بندی خشکسالی، نشریه علوم دانشگاه تربیت معلم، (۱۰) (۱۳۹۰) ۶۴۳-۶۵۴.

3. A. Bardossy, "Copula-based Geostatistical Models for Groundwater Quality Parameters", *Water Resources Research* 42 (2006) W11416.
4. A. Bardossy, J. Li, "Geostatistical Interpolation Using Copulas", *Water Resources Research*, 44 (2008) W07412.
5. N. Cressie, H. C. Huang, "Classes of Non-Separable", *Spatio-Temporal Stationary Covariance Functions*, *Journal of the American Statistical Association*, 96 (1999) 1330-1340.
6. S. De Iaco, D. E. Myers, D. Posa, "Nonseparable space-time Covariance Models: some Parametric Families", *Mathematical Geology*, 34 (2002) 23-42.
7. W. Feller, "An Introduction to Probability Theory and Its Applications", 2, John Wiley, (1966) New York.
8. T. Gneiting, "Nonseparable, Stationary Covariance Functions for Space-Time Data", *Journal of the American Statistical Association*, 97 (2002) 590-600.
9. T. Gneiting, M. G. Genton, P. Guttorp, "Geostatistical Space-time Models, Stationarity, Separability and Full Symmetry", In Finkenstadt, B., Held, L. and Isham, V. (eds.), *Statistical Methods for Spatio-Temporal Systems*, Chapman and Hall (2007) 151-175.
10. B. Graler, E. Pebesma, "The Pair Copula Construction for Spatial Data, a New Approach to Model Spatial Dependency", *Procedia Environmental Sciences*, 7 (2011) 206-211.
11. H. Joe, "Multivariate Models and Dependence Concepts", Chapman and Hall (1997).
12. J. Kent, M. Mohammadzadeh, A. Mosammam, "The Dimple in Gneiting's Spatio Temporal Covariance Model", *Biometrika*, 98 (2011) 489-494.
13. I. Klein, F. Matthias, P. Thomas, "Weighted Power Mean Copulas: Theory and application", IWQW Discussion Paper Series 01/2011, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Institut für Wirtschaftspolitik und Quantitative Wirtschaftsforschung (IWQW) (2011).
14. C. Ma, "Spatio-Temporal Covariance Functions Generated by Mixtures", *Mathematical Geology*, 34 (2002) 965-974.
15. C. Ma, "Spatio-Temporal Stationary Covariance Models", *Journal of Multivariate Analysis* 86 (2003) 97-107.

16. C. Ma, "Spatio-Temporal Variograms and Covariance Models", *Advances in Applied Probability*, 37 (2005) 706-725.
17. S. Miller, G. Samko, "Completely Monotonic Functions", *Integral Transformation and Special Function*, 12 (2001) 389-402.
18. R. B. Nelsen, "An Introduction to Copulas, Lecture Notes in Statistics", New York, Springer (2006).
19. A. Sklar, "Fonctions de Repartition an Dimensions et Leurs Marges", *Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris*, 8 (1959) 229-231.